ناموضعیت در مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۲۸ اردیبهشت ۱۴۰۲

۱ شناسایی جهان واقعی ، موضعیت و متغیرهای پنهان

مکانیک کوانتومی کشف بزرگ قرن بیستم است و تا کنون توانسته است تمامی پدیده های میکروسکوپی را با دقت بی مانندی توصیف و پیش بینی کند. تمامی فیزیک و شیمی و فناوری های الکترونیک و اپتیک و فناوری های وابسته به انها همگی متکی به مکانیک کوانتومی هستند. هم چنین توسعه مکانیک کوانتومی به نظریه های میدان و توسعه نظریه های میدان کوانتومی نظیر الکترودینامیک کوانتومی و نهایتا مدل استاندارد نشان داده است که این نظریه در توصیف جهان ذرات بنیادی نیز تا کنون توفیق یافته است. با این وجود هنوز جنبه هایی از این نظریه وجود دارد که رضایت بخش نیستند و نشان می دهند که نمی توان آن را به صورت یک نظریه نهایی و کامل در نظر آورد. یکی از مهم ترین این جنبه ها تلفیق دو نوع دینامیک یکانی و خطی برای وقتی است که شیئ کوانتومی اندازه گیری نمی شود و دیگری دینامیک غیرخطی و رمبش تابع موج موقع اندازه گیری است. این که چه چیزهایی میکروسکوپی اند و تحول یکانی دارند و چه چیزهایی ماکروسکوپی اند و برهم کنش با آنها به معنای اندازه گیری و رمبش تابع موج است هم چنان ناشناخته و نامفهوم است. در واقع تلفیق این دو جنبه از مکانیک کوانتومی یعنی تحول یکانی تابع موج از یک سو و رمبش ناگهانی آن به یک نقطه از سوی دیگر را تنها می توان با وارد کردن یک عنصر احتمالی نجات داد. اما این نجات دادن به معنای این است که برای همیشه از توصیف یقینی رویدادها ، آنچنان که در دنیای واقعی روی می دهند، دست بکشیم.

ادعای مکانیک کوانتومی و به تبع آن فیزیک جدید آن است که تا آنجا که به فیزیک مربوط است الفاظی مثل عالَمِ واقع دارای ابهام هستند و کار فیزیک شناسایی عالم واقع به این معنای مبهم نیست ، بلکه این علم تنها به تنظیم داده های آزمایشگاهی که از طریق اندازه گیری های دقیق بدست می آیند و سپس تبیین آنها در یک چارچوب نظری سازگار و سرانجام پیش بینی پدیده ها به کمک این نظم نظری می پردازد. دراین دیدگاه، هرآنچه را که نتوان از طریق آزمایش، لااقل آزمایش ذهنی و ایده آل به محک اندازه گیری و سنجش درآورد به حوزه فیزیک تعلق ندارد. [۱] از طرفی مخالفان این تفسیر ادعا می کنند که عقل سلیم حکم می کند الکترون وقتی از یک فیلامان گرم ساطع شده و به روی یک پرده فلورسانس می نشیند، حتما در هر لحظه در نقطه ای از فضا بوده و درنتیجه مسیری را درفضا پیموده است. بنابراین مسیر الکترون یک واقعیتِ عالَم خارج است، مستقل از این که ما آن را مشاهده کنیم یا نکنیم. [۲] در این دیدگاه شانس و تصادف زاده ناآگاهی ما از متغیرهای پنهانی[۳] است که مطابق با یک نظریه بنیادی تر بر دینامیک اشیای میکروسکوپی حاکم هستند. مثال حرکت یک سکه در این جا می تواند مفید باشد. وقتی که یک سکه را به هوا می اندازیم تنها به این اکتفا می کنیم که احتمال شیر آمدن یا خط آمدن سکه پنجاه درصد است . این تمام آن چیزی است که دانش ما را در باره دینامیک سکه بیان می کند. ولی واقعا می دانیم که متغیرهای متعددی را که بر حرکت یک سکه حاکم هستند (نظیر شدت و مکان دقیق ضربه ای که به یک سکه می خورد، مختصات کامل انتقالی و دورانی سکه، و هم چنین مقاومت هوا و نظایر آن) و یک نظریه بنیادی مثل مکانیک وجود دارد که هرگاه این متغیرها را دقیقا تعیین کنیم می توانیم به کمک آن نظریه بنیادی حرکت سکه را دقیقا توصیف کنیم و از شانس و احتمال دست بکشیم.

پاسخ تفسیر کپنهاگی [۴] [۵] از مکانیک کوانتومی آن است که ما وقتی بخواهیم مفهومی مثل « مسیر الکترون» را که جزء تصورات ذهنی ماست، حتی به صورت ذهنی مشاهده کنیم با شکست مواجه می شویم، زیرا تنها وقتی می توانیم مسیر یک الکترون را مشاهده کنیم که بدون مختل کردن سرعت آن در هر لحظه مکانش را «ببنیم» و می دانیم که این امر شدنی نیست. بنابراین وقتی که هیچ راهِ عملی برای محک زدن یک خصلتِ واقعی مستقل از مشاهده ما و جود ندارد، بهتراست از اصرار براینکه آن خصلت واقعی و مستقل از مشاهده است دست برداریم. موقعیتی که بوجود می آید موقعیت کاملا جدیدی است، زیرا فیزیک همواره در جستجوی شناسایی و ادراک نظم پنهانی بوده است که در واقعیت و در پشت رویدادها پنهان است و این هدف با کشف مکانیک کوانتومی با ناکامی نسبی مواجه شده است.

برای آنکه بتوانیم به این سوال ها بدون وارد شدن به بحث های طولانی کلامی که اغلب با ابهام روبرو هستند، فکر کنیم می بایست تعریفی

[۱] این دیدگاه اصطلاحات دیدگاه پوزیتویسیتی نامیده می شود.

[۲] گفته مشهور اینشتین در اینجا جالب توجه است. ماه وقتی که به آن نگاه نمی کنیم نیز در آسمان وجود دارد و یک واقعیت عینی مستقل از مشاهده و ذهن ماست.

[۳] Hidden Variables

[۴] Copenhagen Interpretation

[۵] واضعان و مدافعان این تفسیر بوهر و هایزنبرگ بودند و این تفسیر کمابیش در جامعه فیزیک پذیرفته شده است.

دقیق از واقعیت ارائه دهیم. طبیعی است که این تعریف نمی تواند در باره کل واقعیت جهان باشد بلکه مطابق با بنیادهای دانش فیزیک که همواره متکی بر جزئی نگری توام با دقت بوده است، می بایست یک تعریف مشخص در باره یک عنصر مشخص باشد. برای یافتن یک تعریف دقیق می بایست دوباره به مثال الکترون بازگردیم. درست است که هرگاه سعی کنیم سرعت الکترون را به لحاظ تجربی تعیین کنیم مکان آن را مختل می کنیم و بالعکس هرگاه بخواهیم مکان آن را معین کنیم سرعت آن را مختل می کنیم و بنابراین استدلال نمی توانیم از یک واقعیت خارجی به عنوان الکترونی که یک مسیر معین را طی می کند سخن بگوییم، ولی اگر بتوانیم بدون اینکه این اختلال را انجام دهیم خصلتی از الکترون را تعیین کنیم آنگاه قطعا آن خصلت یک خصلت واقعی آن الکترون یا به اصطلاح مقاله اولیه اینشتین، پودولسکی و روزن [۶] یک عنصر واقعیت [۷] و مستقل از مشاهده ماست زیرا ما بدون آنکه هیچ نوع امکان تاثیر گذاری بر آن الکترون را داشته باشیم توانسته ایم آن خصلت را تعیین کنیم.

آیا چنین امکانی وجود دارد؟ آیا می توانیم خصلتی از یک ذره را بدون اینکه روی آن تاثیر بگذاریم تعیین کنیم؟ به لحاظ اصولی چنین امری غیرممکن به نظر می رسد ولی نکته مهم و اساسی آن است که چارچوب خود مکانیک کوانتومی چنین امکانی را از طریق حالت های درهم تنیده فراهم می آورد. بنابر مکانیک دو ذره که در فاصله های دور از هم قرار گرفته اند می توانند در حالتی مثل

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+, z-\rangle - |z-, z+\rangle) \qquad (۱)$$

قرار بگیرد، زیرا این حالت برهم نهی دو حالت فیزیکی است و بنابر مکانیک کوانتومی برهم نهی دو حالت فیزیکی نیز یک حالت فیزیکی است. علامت AB به این معناست که یکی از این ذرات در دست آلیس A و دیگری در دست باب B است.

بنابر مکانیک کوانتومی هرگاه آلیس اسپین ذره خود را در راستای z اندازه گیری کند، با احتمال $\frac{1}{2}$ مقدار آن را برابر با $\frac{\hbar}{2}$ بدست خواهد آورد و حالت $|\Psi\rangle$ تبدیل می شود به $|z+, z\rangle$ که درنتیجه آن وی می تواند بگوید که اسپین ذره باب در حالت $|+z\rangle$ است. در چارچوب مکانیک کوانتومی این تقلیل تابع موج به صورت آنی و لحظه ای رخ می دهد. بنابراین آلیس بدون اینکه هیچ گونه امکان تاثیرگذاری روی ذره باب داشته باشد می تواند اسپین آن را در راستای z تعیین کند. بنابراین مولفه اسپین ذره باب در راستای z یک عنصر واقعیت است.

حال به خاصیت مهم حالت داده شده می پردازیم و آن اینکه این حالت یک حالتِ اسپین صفر است به این معنا که اسپین کل دو ذره درآن صفراست. چنین حالتی را اگر در هر پایه ای بسط دهیم شکلی مثل شکل 1 به خود خواهد گرفت یعنی درهر پایه ای به شکل زیراست:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{n}+, \mathbf{n}-\rangle - |\mathbf{n}-, \mathbf{n}+\rangle). \qquad (۲)$$

این موضوع را خواننده می تواند با یک محاسبه ساده نشان دهد. کافی است که دقت کند که

[۶] Einstein, Podolsky and Rosen (EPR)

[۷] Element of Reality

$$
\begin{aligned}
|z+\rangle &= a|\mathbf{n}+\rangle + b|\mathbf{n}-\rangle \\
|z-\rangle &= -b|\mathbf{n}+\rangle + a|\mathbf{n}-\rangle,
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

بنابراین اگر آلیس در هر راستای دیگری نیز اندازه گیری می کرد بازهم تقلیل تابع موج به صورت $|n-,n+\rangle$ یا $|n+,n-\rangle$ رخ می داد و بازهم آلیس می توانست اندازه اسپین ذره دوم را در راستای n تعیین کند، بدون اینکه روی آن اثر بگذارد. پس مولفه اسپین در هر راستایی واقعی است. توجه کنید که در اینجا انجام عمل واقعی آزمایش توسط آلیس مطرح نیست بلکه امکان آن در چارچوب مکانیک کوانتومی مطرح است . یعنی اگر آلیس در هر راستایی اندازه گیری می کرد می توانست مولفه اسپین ذره دوم را در همان راستا تعیین کند پس آن مولفه یک عنصر واقعیت است. این که آلیس تصمیم بگیرد آزمایش خود را نهایتا در چه راستایی انجام دهد تاثیری در واقعی بودن یا نبودن این عناصر واقعیت نباید داشته باشد.

دقت کنید که برخلاف آنچه که هرازگاهی شنیده می شود در این جا با یک پارادکس مواجه نیستیم و این آزمایش فکری را نمی بایست پارداکس EPR خواند. در این جا هیچ تناقض یا پارادکسی مطرح نیست بلکه نتیجه ای که اینشتین ، پودولسکی و روزن از این استدلال و آزمایش فکری گرفتند این است که نظریه مکانیک کوانتومی یک نظریه کامل نیست زیرا نمی تواند همه عناصر واقعیت را با تعریفی که در بالا ارائه شد در خود جای داده و آنها را توصیف کند. این نتیجه گیری تا کنون نیز ابطال نشده است یعنی امروزه نیز استدلال و نتیجه گیری EPR هم چنان معتبر است. امروزه بیش از هر زمان دیگری به این نتیجه رسیده ایم که مکانیک کوانتومی ضمن آنکه موفقیت های بیشمار در توصیف طبیعت بدست آورده است می بایست در انتظار یک نظریه جامع تر که روزی جایگزین آن خواهد شد بماند. شاید بتوان نسبت مکانیک کوانتومی کنونی را با آنچه که روزی جایگزین آن خواهد شد به مانند نسبت ترمودینامیک در قرن هجدهم و مکانیک آماری قرن نوزدهم دانست. اما همان طور که تاریخ علم نشان بارها نشان داده است، نظریات جدید از دل تناقض های ساده نظریه با آزمایش و تلاش برای توضیح این تناقض ها به ظهور می رسند و نه از دل حرف و بحث فلسفی صرف. هم چنان که خود مکانیک کوانتومی از دل پدیده های به ظاهر نامربوطی چون گرمای ویژه جامدات و تابش جسم سیاه و اثر فوتوالکتریک ظهور کرد، مکانیک جدید نیز از درون دقت و موشکافی پدیده های نوین طبیعت رخ خواهد نمود.

در این درس از بین شگفتی های مهم مکانیک کوانتومی یعنی برهم نهی (در یک زمان اینجا و آنجا بودن) و درهم تنیدگی یا ناموضعیت (اثر از راه دور) سعی می کنیم که دومی را به اختصار توضیح دهیم.

۲ متغیرهای پنهان

حالت کپسول کوچکی که محتوی گاز هیدروژن است تنها با فشار، حجم و دمای آن معین می شود. این ها متغیرهای فیزیکی و سنجش پذیر و منطبق بر شهود ما هستند. ما آنها را لمس می کنیم و می توانیم براحتی آنها را اندازه بگیریم. این توصیف از یک گاز در ابتدای قرن نوزدهم کاملترین توصیفی بود که می توانستیم ارائه کنیم. اما امروزه می دانیم که این توصیف، توصیف کاملی نیست. در درون این کپسول میلیاردها میلیارد مولکول وجود دارد که در یک همهمه عجیب و غریب هر کدام با سرعتی متفاوت از دیگری به سویی می رود و با دیواره ها برخورد می کند و همین برخوردهاست که موجب فشار گاز بر دیواره می شود و دمای گاز نیز ناشی از سرعت همین مولکولهاست. در واقع فشار چیزی نیست جز برآیند و متوسط ضرباتی که این ذرات به دیواره ها وارد می کنند. برای قرن نوزدهم این ها متغیرهای پنهان [۸] بودند. برای ما هم هنوز متغیرهای پنهان هستند چرا که آنها را نمی بینیم اگرچه وجود آنها را باور داریم. آیا ممکن است که رفتار احتمالاتی ذرات میکروسکوپی نیز ناشی از متغیرهای پنهانی باشد که وجود دارند ولی ما آنها را نمی بینیم یا به آنها دسترسی نداریم؟ آیا ممکن است وضعیت مکانیک کوانتومی در امروز مثل ترمودینامیک در قرن هجدهم و نوزدهم باشد و روزی با شناخت متغیرهای پنهان، به دانشی دقیق تر از متغیرهای پنهان و میکروسکوپی تر دست پیدا کنیم که برای مکانیک کوانتومی امروز به مثابه مکانیک آماری در قیاس با ترمودینامیک باشد؟

بدون اینکه به ماهیت این نوع متغیرهای پنهان دسترسی داشته باشیم می توانیم به صورت کاملا مجرد و انتزاعی در باره امکان وجود آنها گفتگو کنیم و نقش احتمالی آنها را بفهمیم. فرض کنید که ذره ای که در حالت $|x+\rangle$ است وارد یک دستگاه اشترن گرلاخ می شود که مولفه S_z را اندازه می گیرد. می دانیم که به طور متوسط نیمی از ذرات به سمت بالا و نیمی از آنها به سمت پایین می روند. می توانیم فرض کنیم که هر ذره متغیرپنهانی دارد که آن را λ می نامیم. این متغیر کاملا انتزاعی است و مقدار آن عددی حقیقی بین منهای یک تا یک است.

- **توضیح:** متغیر پنهان یک متغیر انتزاعی است که سعی می کنیم به این سوال پاسخ دهیم که آیا نتایج آماری مکانیک کوانتومی را می توانیم توضیح دهیم یا خیر. این متغیر به معنای یک پارامتر واقعی میکروسکوپی و فیزیکی نیست.

می توانیم فرض کنیم که این متغیر پنهان است که رفتار ذره را تعیین می کند و هیچ نوع احتمالی در کار نیست. در این تصور حالت درست ذره آن چیزی که قبلا نوشتیم نیست بلکه حالت ذره این است:

$$|x+, \lambda\rangle.$$

[۸] Hidden Variables

به این ترتیب ذرات به صورت زیر رفتار می کنند:

$$S_z = -1 \qquad if \quad -1 \leq \lambda \leq 0$$
$$S_z = 1 \qquad if \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad . \tag{۴}$$

توزیع متغیر تصادفی λ را نیز یکنواخت است. به همین دلیل است که تقریبا نیمی از ذرات در آزمایش اشترن گرلاخ به بالا می روند و نیمی دیگر به پایین. اما این توصیف کمی عجولانه و ساده انگارانه است. چرا که اگر همین ذرات را به دستگاه اشترن گرلاخی بتابانیم که اسپین ذرات را در یک جهت دیگر مثلا در راستای $S_n = \cos\theta S_z + \sin\theta S_x$ اندازه می گیرد، آنگاه نتایج کاملا متفاوت خواهند بود. پس متغیر پنهان تنها متعلق به خود ذره نیست بلکه متعلق به ذره و دستگاه اندازه گیری با هم است. منطقی هم همین است چرا که نتیجه اندازه گیری ناشی از برهم کنش ذره با دستگاه اندازه گیری است. در این آزمایش، می دانیم که نتیجه چنین است:

$$\langle S_n \rangle = \sin\theta. \tag{۵}$$

توصیف چنین آزمایشی با متغیرهای پنهان چنین است:

$$S_n = -1 \qquad if \quad -1 \leq \lambda \leq \alpha$$
$$S_n = 1 \qquad if \quad \alpha \leq \lambda \leq 1. \tag{۶}$$

حال پارامتر α را چنان تعیین می کنیم که نتیجه متوسط همان چیزی باشد که کوانتوم مکانیک پیش بینی می کند. هرگاه توزیع λ را یکنواخت بگیریم خواهیم داشت: $P(\lambda) = \frac{1}{2}$ و در نتیجه

$$\langle S_n \rangle = (\alpha + 1) \times (\frac{1}{2}) \times (-1) + (1 - \alpha) \times (\frac{1}{2}) \times (1) = \alpha \tag{۷}$$

بنابراین کافی است که قرار دهیم $\alpha = \sin\theta$ تا همان نتیجه مکانیک کوانتومی بدست آید. در حالت کلی برای هر نوع اندازه گیری یک مشاهده پذیر M که مقدار های بدست آمده ± 1 باشند می توانیم بنویسیم:

$$M = -1 \qquad if \quad -1 \leq \lambda \leq \langle\psi|M|\psi\rangle$$
$$M = 1 \qquad if \quad \langle\psi|M|\psi\rangle \leq \lambda \leq 1. \tag{۸}$$

در این صورت براحتی معلوم می شود که نتیجه متغیرهای پنهان با نتیجه مکانیک کوانتومی برهم منطبق اند.

■ **تمرین:** روی ذره ای که در حالت $|\psi\rangle$ یک مشاهده پذیرِ مثل M را اندازه گیری می کنیم. این مشاهده پذیر سه مقدار مختلف $-1,\ 0,\ 1$ را اختیار می کند. مقدار $\langle\psi|M|\psi\rangle$ و $\langle\psi|M^2|\psi\rangle$ را اندازه می گیریم. مشابه با مثال قبلی یک مدل متغیر پنهان بسازید که این نتایج مکانیک کوانتومی را توضیح دهد.

پاسخ: این بار می بایست فاصله $[-1,1]$ را به سه قسمت تقسیم کنیم. با محاسبه ای که شبیه به مثال قبلی است بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} M=-1 \qquad & if \quad -1\leq\lambda\leq a \\ M=0 \qquad & if \quad a\leq\lambda\leq b \\ M=1 \qquad & if \quad b\leq\lambda\leq 1, \end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن

$$a=\langle M\rangle+\langle M^2\rangle-1, \qquad b=\langle M\rangle-\langle M^2\rangle+1.$$

تابع توزیع $P(\lambda)$ هم چنان یکنواخت در نظر گرفته شده است.

۳ نامساوی بل

چگونه می توان درباره عناصر واقعی و درست یا نادرست بودن آنها به صورت تجربی آنچنانکه در علم جدید مرسوم است قضاوت کرد؟ چگونه می توان از این ایده های بعضاً مبهم و نا دقیق یک گزاره ابطال پذیر ساخت و آن را به محک تجربه سپرد؟ در بخش پیشین دیدیم که اینشتین، پودولسکی و روزن ملاک های دقیقی برای به تعریف و محک زدن واقعیت ارایه دادند. کار مهم جان بل [۹] آن بود که نشان داد چگونهاین فرضیات به یک نامساوی مشخص در باره نتایج آزمایشگاهی می شود.

■ **یک توضیح :**

به طور سنتی فرض می شده که نامساوی بل مبتنی بر دو فرض اساسی است. یکی واقعیت [۱۰] و دیگری موضعیت [۱۱]. اجتماع این دو فرض را اصطلاحا واقعیت موضعی [۱۲] نامیده می شود. اما امروزه این دیدگاه بیشتر پذیرفته می شود که نامساوی بل تنها بر اساس فرض موضعیت

[۹] Bell John (۱۹۹۰ـ۱۹۲۸)
[۱۰] Realism
[۱۱] Locality
[۱۲] Local Realism

استوار است. همین که از لفظ «بیشتر» در جمله پیشین استفاده کرده ایم نشان دهنده این است که قضاوت بین این دو دیدگاه آنقدرها که فکر می کنیم به صورت قاطع امکان پذیر نیست. دلیل اش هم این است که در اثبات نامساوی بل همواره ممکن است فرض های ظریفی نهفته باشد که ناشی از یکی از این دو دیدگاه باشد. ما در این بخش دو نوع اثبات ارائه می دهیم که یکی از آنها متکی بر واقعیت موضعی است و دیگری تنها متکی بر موضعیت است.

نخستین و مهمترین چیزی را که باید در باره نامساوی بل به خاطر سپرد آن است که این نامساوی نتیجه مکانیک کوانتومی نیست و هیچ گزاره ای را نیز در باره مکانیک کوانتومی ارایه نمی دهد. بلکه این نامساوی نتیجه کاربرد عقل سلیم و استدلال بر مبنای تنها واقعیت موضعی یا تنها موضعیت است. واقعیت به این معناست که خواص اشیا قبل از مشاهده ما معین هستند و وجود خارجی دارند. موضعیت به این معناست که رویدادهای با فاصله فضاگونه رابطه علّی ندارند و روی یک دیگر اثر نمی گذارند. حتی این را نیز می پذیریم که اگر چه تمام متغیرهای تصادفی ای که ممکن است سیستم فیزیکی ما (متشکل از ذرات و چیدمان اندازه گیری) را تعیین کند دانسته باشند، بازهم نتیجه ازمایشی که انجام می دهیم تصادفی است و یقینی نیست. حال سوالی که بل طرح می کند آن است که آیا در جهانی با این خاصیت، چه نوع همبستگی هایی امکان پذیر هستند و چه نوع ویژگی ای دارند؟ وی نشان می دهد که در چنین جهانی همبستگی ها مستقل از این که چقدر زیاد یا کم باشند همواره یک محدودیت دارند و این محدودیت توسط یک نامساوی ساده بیان می شود. هرگاه این نامساوی در آزمایشگاه نقض شود، بسته به دیدگاهی که در مورد روش اثبات این نامساوی داریم می توانیم به این نتیجه برسیم که واقعیت موضعی یا تنها موضعیت جهان نقض شده است. بعد از این مقدمه به توصیف ازمایش ذهنی بل می پردازیم.

فرض کنید که آلیس و باب در دو آزمایشگاه دور از هم هستند. آلیس دو آزمایش جداگانه انجام می دهد که آنها را A و B می نامیم. باب هم دو آزمایش جداگانه انجام می دهد که آن ها را C و D می نامیم. هر کدام از این دو آزمایش دو نتیجه دارند که آنها را با $+1$ و -1 نشان می دهیم. این وضعیت در شکل (۱) نشان داده شده است. این دو شخص آزمایش های خود را چنان انجام می دهند که هیچ گونه ارتباط علّی بین آنها وجود نداشته باشد. برای این کار آزمایش های خود را در فاصله فضاگونه انجام می دهند. به عبارت دقیق تر فرض می کنیم که آلیس به طور تصادفی دو آزمایش A و B و باب نیزبه طور تصادفی دو آزمایش C و D را انجام می دهند. می توان تصور کرد که هر بار که آلیس می خواهد آزمایش انجام دهد سکه ای را پرتاب می کند و بنا بر روی سکه، تصمیم می گیرد که آزمایش A یا B را انجام دهد. می توان تصور کرد که آلیس با فشار یک دکمه دو حالته تصمیم می گیرد که آزمایش A انجام شود یا آزمایش B . هر بار هم که یکی از این آزمایش ها انجام می شود، یک چراغ قرمز یا سبز روشن می شود یا یک آشکار ساز تیک می زند یا نمی زند، که آنها را به مثابه نتایج ی $+1$ و -1 می گیریم. باب نیز به طور مشابه همین کار را می کند. آزمایش های $A,\ B,\ C$ و D هر کدام دو نتیجه دارند. این نتایج را متناسب با نام خود آزمایش ها با a, b, c و c نشان می دهیم.

۱.۳ اثبات نا مساوی بل بر اساس واقعیت و موضعیت

فرض ما این است که ذرات خاصیت هایی دارند که قبل از آزمایش معین هستند و آزمایشگر تنها این خاصیت ها را مشاهده می کند. بنابراین جفت ذره ای که تولید می شود هر بار متغیرپنهانی دارد که آن را با λ نشان می دهیم. بنابراین آلیس و باب برای هر جفت ذره مقادیر مشاهده پذیرهای $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ و d_λ را مشاهده می کنند. در اینجا a_λ خاصیت معین و از پیش موجودی است که آلیس تنها آن را مشاهده و کشف می کند نه این که عمل مشاهده او چنین خصلتی را خلق کند. همین امر در مورد خصلت های دیگر نیز برقرار است. موضعیت به این معناست که مشاهده آلیس هیچ نوع تاثیری روی ذره ای که در دست باب است و خصلت هایی که او قرار است مشاهده کند نمی گذارد. به دلیل تصادفی بودن اندازه گیری ها در یک چهارم موارد آلیس و باب اندازه گیری های A و C را انجام می دهند. در این موارد متوسط زیر را حساب می کنند:

$$\langle AC\rangle = \int a_\lambda c_\lambda P(\lambda) d\lambda. \qquad (۱۰)$$

سپس همین کار را برای موارد دیگر نیز انجام می دهند. به دلیل آنکه تعداد ذرات بسیار زیاد است می توانیم تابع $P(\lambda)$ را برای همه این چهار دسته از موارد یکسان بگیریم. سپس آلیس و باب کمیت زیر را تشکیل می دهند:

$$\langle AC\rangle + \langle AD\rangle + \langle BC\rangle - \langle BD\rangle = \langle A(C+D) + B(C-D)\rangle. \qquad (۱۱)$$

این کمیت برابر است با

$$\langle A(C+D) + B(C-D)\rangle = \int \left[a_\lambda(c_\lambda + d_\lambda) + b_\lambda(c_\lambda - d_\lambda)\right] P(\lambda) d\lambda. \qquad (۱۲)$$

اما می دانیم که همواره

$$a_\lambda(c_\lambda + d_\lambda) + b_\lambda(c_\lambda - d_\lambda) = \pm 2$$

و در نتیجه

$$|a_\lambda(c_\lambda + d_\lambda) + b_\lambda(c_\lambda - d_\lambda)| = 2.$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی مثلث بدست می آوریم:

$$|\langle A(C+D) + B(C-D)\rangle| \le \int \mid a_\lambda(c_\lambda + d_\lambda) + b_\lambda(c_\lambda - d_\lambda) \mid P(\lambda) d\lambda = \int 2P(\lambda) d\lambda = 2. \qquad (۱۳)$$

به این ترتیب نامساوی بل ثابت می شود:

$$|\langle A(C+D) + B(C-D)\rangle| \le 2. \qquad (۱۴)$$

این اثبات متکی بر دو فرض مهم است: اول این که خصلت های ذرات واقعی و متعین هستند و فقط توسط آزمایشگر مشاهده می شوند و دوم اینکه مشاهده هر کدام از ذرات روی خصلت های ذره دیگر اثر نمی گذارد.

۲.۳ اثبات نا مساوی بل تنها براساس موضعیت

در این اثبات فرض معین بودن خصلت ها را قبل از اندازه گیری کنار می گذاریم. بنابراین بجای اینکه از a_λ حرف بزنیم، تنها از احتمال اینکه آلیس در اندازه گیری کمیت A دو مقدار 1 و -1 را بدست آورد حرف می زنیم. این دو مقدار هم، عددهایی هستند که آلیس بسته به یکی از دو نتیجه ای که از آزمایش اش بدست می آورد ثبت می کند. بنابر این کمیت زیر را تعریف می کنیم:

$$P(a|A,\lambda). \qquad (۱۵)$$

این کمیت احتمال این است که وقتی آلیس آزمایش A را انجام می دهد، نتیجه $a \in \{1.-1\}$ را بدست آورد. دقت کنید که $+1$ و -1 در اینجا به معنای خصلتی از اشیاء نیست بلکه تنها نشان دهنده ی دو نتیجه آزمایش یا چیدمان آزمایشگاهی و ثبت کننده ها هستند. هم چنین ذرات ممکن است از ابتدا همبستگی هایی داشته باشند، چون به هر حال در یک مکان و در یک آزمایش تولید شده و روی یکدیگر اثر گذاشته و سپس به آلیس و باب فرستاده شده اند. وسایل اندازه گیری نیز حتی اگر در دو نقطه دور از هم در کره زمین ساخته شده باشند، ممکن است همبسته شده باشند، هر دو این آزمایشگاه ها روی یک کره زمین قرار دارند، زیر تابش یک خورشید قرار دارند و اثرات جوی روی آنها کم و بیش یکسان است. برای بیان همه این همبستگی های پیشین، یک پارامتر λ به کار می بریم که ممکن است برای هر بار ازمایش آلیس و باب مقدار متفاوتی داشته باشد که از یک تابع توزیع دلخواه $P(\lambda)$ گرفته می شود. بنابراین به طور دقیق تر ما باید از کمیت زیر صحبت کنیم:

$$P(a,c|A,C,\lambda) \qquad (۱۶)$$

یعنی احتمال اینکه وقتی آلیس آزمایش

A را انجام می دهد و باب آزمایش C را انجام می دهد آلیس نتیجه $a \in \{1.-1\}$ و باب نتیجه $c \in \{1,-1\}$ را بدست آورند. حال یک فرض مهم می کنیم که به آن فرض موضعیت می گوییم. هر نوع همبستگی بین نتایج اندازه گیری ها ناشی از پارامتر λ است که ناشی از همبستگی یا برهم کنش ذرات موقع تولید بوده است. بعد از آن اندازه گیری های آلیس و باب (اگر در فواصل فضاگونه انجام شوند، یعنی نور نتواند از یکی به دیگری هیچ اثری را منتقل کند) نمی بایست روی یک دیگر اثر بگذارند. دقت کنید که هم چنان نوع اندازه گیری و هم چنین متغیر پنهان روی نتیجه اندازه گیری به صورت موضعی اثر می گذارند. بنابراین فرض موضعیت این است:

$$P(a,c|A,C,\lambda) = P(a|A,\lambda)P(c|C,\lambda). \qquad (۱۷)$$

معنای این فرض این است که این که آلیس تصمیم بگیرد کدام آزمایش را انجام دهد روی تصمیم باب اثری ندارد. به عبارت دیگر فاصله ها آنقدر از هم دورند و زمان بندی انجام آزمایش هم چنان است که نور و یا هیچ اثر دیگری نمی تواند در فاصله بین فشار دکمه از طرف الیس به باب برسد و روی تصمیم او اثر بگذارد. هم چنین نتیجه تصادفی بدست آمده از یک آزمایش روی نتیجه دیگری اثر ندارد و اگر همبستگی ای بین این دو نتیجه وجود دارد در همان پارامتر λ نهفته است. به عنوان مثال وضعیت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} a=-1, \qquad c=-1 \qquad if \quad -1\leq\lambda\leq 0 \\ a=1, \qquad c=1 \qquad if \quad 0\leq\lambda\leq 1. \end{aligned} \tag{۱۸}$$

در این صورت نتایج آلیس و باب نیز همبستگی خواهند داشت. می توان وضعیت های دیگری را برای متغیر پنهان در نظر گرفت که نوع همبستگی نتایج فوق کاملا متفاوت باشد. به هر حال آنچه که مهم است این است که دریابیم همبستگی پیشین بین ذرات و حتی بین آزمایشگاه ها را رد نمی کنیم ولی همه آنها در پارامتر λ نهفته است. بازهم تاکید می کنیم که این رابطه وجود همبستگی پیشین بین ذرات را نفی نمی کند. تنها بیان می کند که تصمیمی که آلیس برای نوع اندازه گیری اش و نتیجه ای که در آن لحظه بدست می آورد تاثیری روی تصمیم باب و نتیجه ای که بدست می آورد نخواهد گذاشت. فاصله اندازه گیری های آنها نیز فضا گونه است. به طور مشخص تر و به عنوان مثال فرض کنید که فاصله آلیس و باب L متر است. آلیس قرار است آزمایش های خود را در زمان های

$$1, 2, 3, \cdots$$

ثانیه انجام دهد و باب آزمایش های خود را در زمان های

$$1+\tau, 2+\tau, 3+\tau, \cdots$$

و $L > c\tau$ است. آلیس و باب بارها این آزمایش ها را انجام می دهند و نتایج خود را ثبت می کنند.

حال همان نوع محاسباتی را که در بخش پیشین آلیس و باب انجام می دادند، این بار هم انجام می دهند و بدست می آورند:

$$\langle AC\rangle = \sum_{a,c}\int acP(a,c|A,C,\lambda)P(\lambda)d\lambda \tag{۱۹}$$

که بنابر فرض موضعیت تبدیل می شود به

$$\langle AC\rangle = \sum_{a,c}\int acP(a|A,\lambda)P(c|C,\lambda)P(\lambda)d\lambda = \int A_\lambda C_\lambda d\lambda \tag{۲۰}$$

که در آن برای سادگی خلاصه نویسی کرده ایم یعنی اینکه قرار داده ایم:

$$\int \equiv \int P(\lambda)d\lambda,$$

و منظور از A_λ نیز عبارت زیر است

$$A_\lambda = \sum_a aP(a|A,\lambda)$$

با تعریف مشابهی برای C_λ. بقیه این استدلال محاسبه ساده است: داریم

$$\langle AC + AD\rangle = \int A_\lambda C_\lambda + \int A_\lambda D_\lambda. \quad (۲۱)$$

حال جمله ای را به این عبارت اضافه و کم می کنیم:

$$\langle AC + AD\rangle = \int A_\lambda C_\lambda(1 \mp B_\lambda D_\lambda) + \int A_\lambda D_\lambda(1 \pm B_\lambda C_\lambda). \quad (۲۲)$$

و از آنجا با استفاده از نامساوی مثلث

$$|\langle AC + AD\rangle| \leq \int |A_\lambda C_\lambda(1 \mp B_\lambda D_\lambda)| + \int |A_\lambda D_\lambda(1 \pm B_\lambda C_\lambda)|, \quad (۲۳)$$

و سپس با استفاده از این که $|A_\lambda| \leq 1, \cdots$ بدست می آوریم

$$|\langle AC + AD\rangle| \leq \int |1 \mp B_\lambda D_\lambda| + \int |1 \pm B_\lambda C_\lambda|. \quad (۲۴)$$

اما با توجه به اینکه $|B_\lambda C_\lambda| \leq 1, \quad |B_\lambda D_\lambda| \leq 1$ می توانیم علامت های قدر مطلق را برداریم و بنویسیم

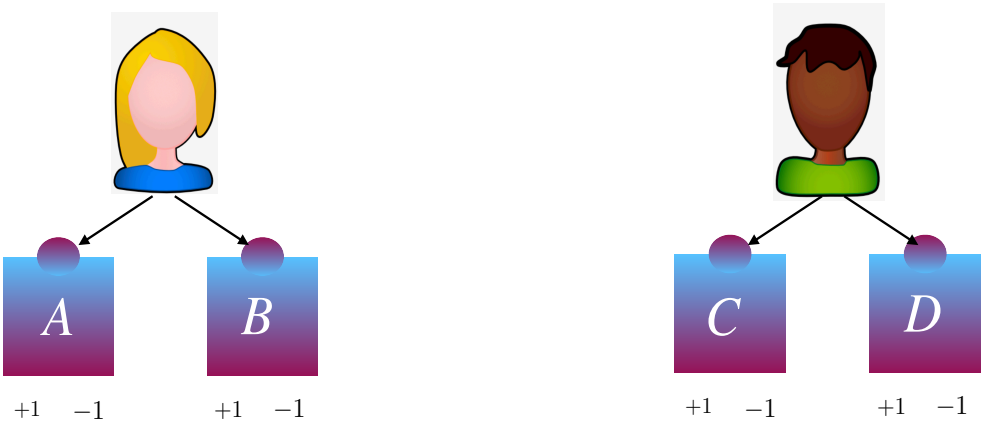
$$|\langle AC + AD\rangle| \leq \int 1 \mp B_\lambda D_\lambda + \int 1 \pm B_\lambda C_\lambda = 2 \pm \langle B_\lambda(C_\lambda - D_\lambda)\rangle. \quad (۲۵)$$

و یا با تعریف اولیه متوسط اندازه گیری ها

$$|\langle AC + AD\rangle \leq 2 \pm \langle B(C - D)\rangle. \quad (۲۶)$$

اما اگر $|x| \leq 2 \pm y$ باشد براحتی می توان نتیجه گرفت که $|x| \mp y \leq 2$ و یا $|x| + |y| \leq 2$ و از انجا $|x + y| \leq 2.$ در نتیجه می رسیم به اینکه

$$|\langle A(C + D) + B(C - D)\rangle| \leq 2 \quad (۲۷)$$



شکل ۱: آزمایش بل : آلیس و باب هر کدام می توانند به طور تصادفی یکی از دو دکمه روبروی خود را فشار دهند که بر مبنای آن یکی از دو دستگاهی که روبروی آنهاست به کار می افتد و یک نتیجه تصادفی را بیرون می دهد. این دستگاه می تواند یک آزمایش باشد و نتیجه تصادفی ای که بیرون می دهد نیز می تواند مقدار کمیتی باشد که آن دستگاه از یک ذره یا چیزی مثل آن اندازه گیری می کند. ولی این تعبیر اخیر از این آزمایش ضروری نیست. نامساوی بل در مورد میزان همبستگی هر دو واقعه دوتایی در جهان ماست.

که همان نامساوی بل است. بنابراین هرگاه هیچ گونه همبستگی مافوق نوری بین عمل یا انتخاب آلیس و باب برقرار نباشد، می بایست نتایج آزمایش های آنها در نامساوی فوق صدق کند. اگر این نامساوی نقض شود به این معناست که فرض موضعی بودن که مبنای اصلی استخراج این نامساوی بوده است نقض شده است.

باید اضافه کنیم که نامساوی اولیه بل به این شکل نبوده است و نامساوی فوق که نامساوی $CHSH$ خوانده می شود، نخستین بار توسط کلاوزر، هورن، شیمونی و هولت [۱۳] ارائه شده است. دقت کنید که این نامساوی در باره مکانیک کوانتومی نیست بلکه یک نامساوی در باره مشاهدات ماست. این نامساوی می گوید که در جهانی با خاصیت موضعی [۱۴] بین کلیک های آزمایشگاهی می بایست این نامساوی برقرار باشد.

---

[۱۳] Clauser, Horne, Shimony , Holt

[۱۴] Local Realism

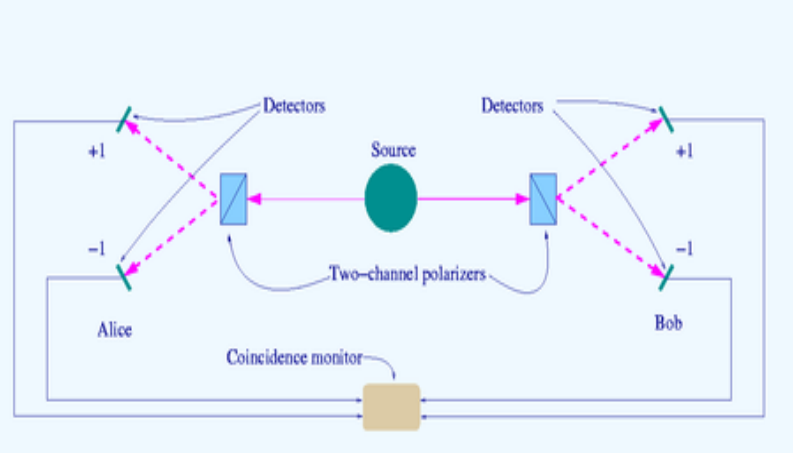
۳.۳ نقض نامساوی بل در مشاهدات آزمایشگاهی

برای اینکه ببینیم آیا جهان ما یک جهان با خاصیت موضعی است یا نه می بایست به آزمایش رجوع کرده و درستی یا نادرستی این نامساوی را بیازماییم. از سال ۱۹۷۲ تا کنون آزمایشهای گوناگونی با فوتون هاا نجام شده است که همگی نشان دهنده این هستند که در دنیای میکروسکوپی نامساوی بل به وضوح نقض می شود. شکل (۲) شمای کلی یکی از این آزمایشها را نشان می دهد. منبع S فوتون هایی را در به دو طرف ساطع می کند که از درون دو قطبنده می گذرند. این فوتون ها در حالتی قرار گرفته اند که اصطلاحا آن را یک حالت درهم تنیده می گویند. به عبارت دیگر فوتون ها در حالت زیر هستند:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|H,H\rangle + |V,V\rangle\right) \qquad (۲۸)$$

که در آن $|H\rangle$ نشان دهنده یک حالت با قطبش افقی و $|V\rangle$ نشان دهنده یک حالت با قطبش عمودی است. این گونه حالت ها را می توان با تاباندن یک باریکه فوتون به یک کریستال غیر خطی تولید کرد. ازمایشی که چنین حالت هایی را تولید می کند، Parameteric Down Conversion نام دارد. این قطبنده ها فوتون ها را بر اساس قطبش آنها جدا می کنند و به آشکارساز ها می فرستند. در آخر هم همزمانی فوتون ها توسط یک شمارشگر بسیار دقیق تست می شود که اطمینان حاصل شود کلیک های حاصل از آشکارساز ها مربوط به یک جفت فوتون ساطع شده هستند. جهت قطبنده ها می بایست با چنان سرعتی عوض شود که در فاصله دو اندازه گیری نور فرصت نکند از یک نقطه A به نقطه B برسد. به عبارت دیگر فرض می شود که قصد آزمایشگر A برای اینکه قطبش فوتون اش را در کدام راستا اندازه بگیرد، بر قصد آزمایشگر B برای تعیین نوع اندازه گیری اش اثر ندارد.

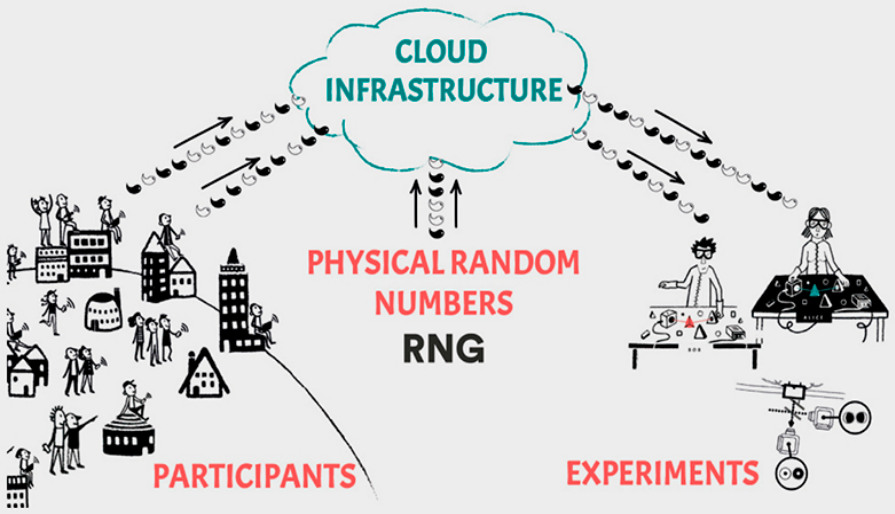
در این آزمایشها آلیس جهت های قطبش فوتون را در راستای افقی و عمودی یعنی H و V اندازه می گیرد. باب نیز جهت های قطبش فوتون هایش را در راستاهایی که با راستای فوق زاویه ۴۵ درجه می سازند اندازه می گیرد و معلوم می شود که مقدار نقض نامساوی بل می تواند به مقدار حداکثری $2\sqrt{2}$ برسد.



شکل ۲: شمایی کلی از آزمایش نامساوی بل (برگرفته از ویکی پدیا)

این نوع آزمایش ها تا کنون توسط افراد زیر انجام شده است: فریدمن و کلازر (۱۹۷۲) [۱۵] ، آلن اسپه (۱۹۸۲) [۱۶] ، ولفگانگ تیتل و گروه ژنو(۱۹۹۸) [۱۷] ، گرگ وایز [۱۸] ژیان وی پن و همکاران (۲۰۰۰) [۱۹] و سپس توسط دیگران در سالهای ۲۰۰۱ ، ۲۰۰۷ ،۲۰۰۸، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۳ توسط گروه های دیگر [۲۰] . در هرکدام از این آزمایشها سطح دقت بالا تر رفته و در هرکدام یکی از راه های گریز [۲۱] آزمایش های قبلی بسته شده است. یکی از مهم ترین این ایرادها مربوط به تشکیک در اراده آزاد [۲۲] است: آلیس خیال می کند که به اراده آزاد خود و مستقل از باب دکمه مورد نظر خود را فشار می دهد و یکی از آزمایش های خود را انتخاب می کند. چنین چیزی فقط فکر و خیال است. در واقعیت اراده این دو از قبل به هم وابسته است. برای رد کردن این اشکال در سی ام نوامبر ۲۰۱۶ یک آزمایش به نام آزمایش بزرگ بل [۲۳] انجام شد، شکل (۳).

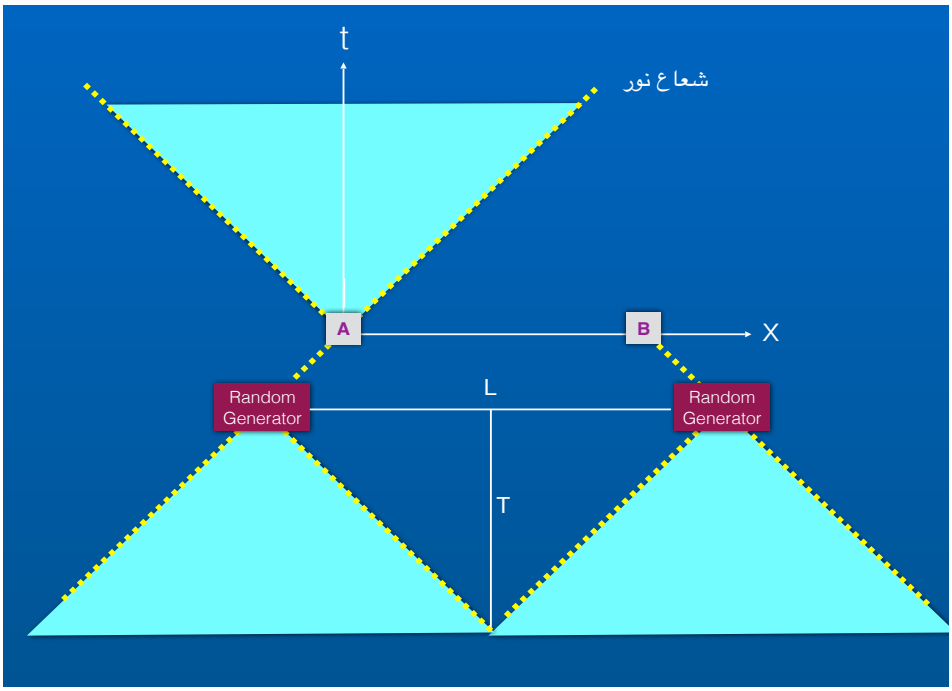
[۱۵] Freedman and Clauser
[۱۶] Alain Aspect
[۱۷] Wolfgang Tittel, and the Genova Group
[۱۸] Greg Weihs
[۱۹] Jian Wei Pan et al
[۲۰] see: the item "Bellt test Experiments" in Wikipeida.
[۲۱] Loophole
[۲۲] Free Will
[۲۳] Big Bell Test



شکل ۳: شمایی از آزمایش بزرگ بل. ر.ک. https://thebigbelltest.org.

در این آزمایش ده ها هزار نفر از سرتاسر دنیا جای آلیس و باب را می گیرند و به صورت تصادفی سیگنال های صفر یا یک را به دو پردازنده در یک مرکز می فرستند و آن پردازنده بر اساس رشته هایی که دریافت می کند آزمایش های آلیس و باب را انتخاب می کند. [۲۴] به این ترتیب امکان همبستگی قبلی بین اراده و خواست آلیس و باب از بین می رود. ولی بازهم نامساوی بل به همان مقدار قبلی نقض می شود. این بار اشکال اراده آزاد و همبستگی قبلی به کل آدمهایی که در کره زمین هستند منتقل شده است. ممکن است انتخاب آنها واقعا تصادفی نباشد و از قبل به هم همبسته شده باشد. برای پاسخ به این اشکال چه باید کرد؟ اگر به شکل (۵) نگاه کنیم، می توانیم به راه حل آن پی ببریم.

[۲۴] ر.ک. https://thebigbelltest.org/



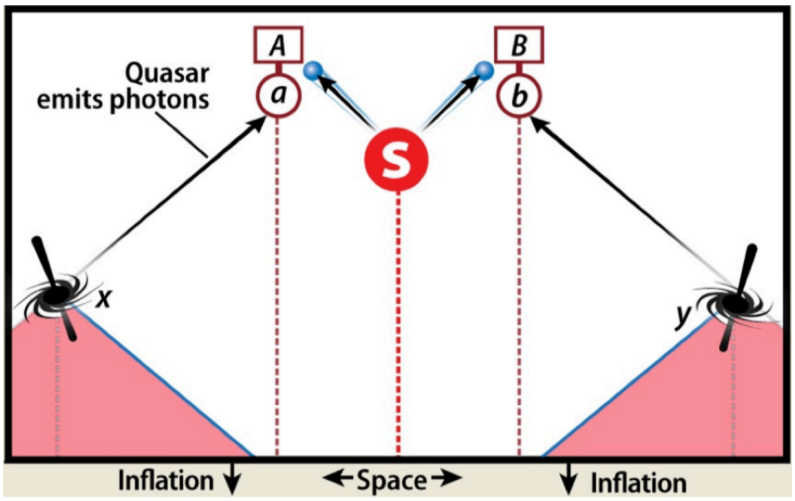
شکل ۴: اگر دو تولید کننده اعداد تصادفی فاصله L را از هم داشته باشند، مخروط نوری آنها در زمان $T = \frac{L}{c}$ ثانیه قبل با هم تلاقی می کند. بنابراین نمی توان گفت که آنها واقعا ناهمبسته باشند.

شکل ۵: شمایی کلی از آزمایش نامساوی بل (برگرفته از ویکی پدیا)

در این شکل دو تولید کننده اعداد تصادفی نشان داده شده اند. این دو تولید کننده می توانند دو شخص باشند (مثل الیس و باب) یا دو نرم افزار یا حتی دو اتم رادیواکتیو. ولی هر چه هست اگر فاصله آنها از هم برابر با L باشد، مخروط نوری گذشته آنها در زمان $T = \frac{L}{c}$ ثانیه قبل با هم تلاقی می کند که به این معناست که یک حادثه در زمان T ثانیه قبل می توانسته بر هر دو آنها اثر گذاشته و آن ها را به هم همبسته کرده باشد. بنابراین برای اینکه میزان همبستگی این دو رشته تصادفی را کم بکنیم می بایست فاصله آنها را تا حد ممکن زیاد کنیم. به دلیل بالابودن سرعت نور افزایش این فاصله به میزان چند کیلومتر یا هزار کیلومتر فایده چندانی ندارد زیرا زمان همبستگی را تنها به یک هزارم یا یک صدم ثانیه قبل برمی گرداند. در سال ۲۰۱۷ آزمایش کیهانی بل [۲۵] انجام شد تا بتواند اشکال اراده آزاد را در مقیاس کیهانی برطرف کند. شکل (۶) نشان می دهد که سیگنال هایی از دو کوازار بسیار دور از هم به عنوان تولیدکننده های اعداد تصادفی در نظر گرفته شده و آزمایش بل با سیگنال های دریافتی از

[۲۵] Cosmic Bell Test

آنها روی زمین انجام شده. [۲۶] مخروط نوری این دو کوازار در ۶.۱۳ میلیاردسال قبل نیز به هم نمی رسد. می توان با اطمینان گفت که حتی اگر یک همبستگی نیز در آن زمان و قبل از آن بین این دو سیگنال وجود داشته در طول این مدت طولانی از بین رفته و سیگنال ها واقعا تصادفی و از هم مستقل هستند. اکنون اعتقاد عمومی تثبیت شده این است که نامساوی بل در طبیعت نقض می شود و طبیعت مستقل از این که با چه نظریه ای توصیف می شود با موضعیت سازگار نیست.



شکل ۶: شمایی از آزمایش کیهانی بل.

۴ توصیف همبستگی های غیرکلاسیک در مکانیک کوانتومی

همانطور که تا کنون تاکید کرده ایم نامساوی بل یک نامساوی کلی است که بیان می کند در جهانی که خاصیت های موضعی داشته باشد، هر نوع همبستگی بین نتایج اندازه گیری های ما می بایست در یک نامساوی صدق کنند. اصطلاحاً می گوییم که خاصیت همبستگی های کلاسیک این

[۲۶] Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars, Dominik Rauch et al. Physical Review Letters, 121, 080403(2018).

است که در نامساوی بل صدق کنند. با مشاهدات متعددی که از نقض نامساوی بل حاصل شده است، معلوم می شود که جهان ما این گونه نیست. یعنی در طبیعت همبستگی هایی وجود دارند که کلاسیک نیستند. حال سوال این است که آیا مکانیک کوانتومی می تواند این نوع همبستگی ها را توضیح دهد؟ پاسخ این سوال مثبت است. [۲۷] است.

۱.۴ حالت های در هم تنیده

در درسهای آینده حالت های درهم تنیده را به تفصیل بررسی خواهیم کرد. آنچه که اکنون می دانیم این است که درهم تنیدگی مهم ترین ویژگی کوانتومی است و همین ویژگی آن را به یک منبع مهم و ارزشمند برای انجام رایانش و مبادله اطلاعات کوانتومی تبدیل می کند. علیرغم مطالعات بسیار در این زمینه هنوز راه درازی تا فهم جنبه های متعدد درهم تنیدگی باقی مانده است. در این بخش تنها به تعریف های اساسی در این مورد می پردازیم.

۱.۱.۴ حالت های درهم تنیده خالص

یک حالت ضربی [۲۸] حالتی است که می توان آن را به صورت ضرب تانسوری دو حالت از هر بخش نوشت :

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \qquad (۲۹)$$

در چنین حالتی هیچ گونه همبستگی بین نتایج اندازه گیری های آلیس و باب و جود ندارد یعنی اینکه برای هر نوع اندازه گیری روی چنین حالتی داریم

$$P_{AB}(m_i, n_j) = P_A(m_i)P_B(n_j). \qquad (۳۰)$$

یک حالت درهم تنیده دوبخشی خالص [۲۹] حالتی است که نتوان آن را به صورت ضرب تانسوری دو حالت از هر بخش نوشت. در اندازه گیری روی این حالت همواره یک نوع همبستگی بین اندازه گیری های آلیس و باب وجود دارد. یعنی نه تنها شرط ۳۱ برقرار نیست بلکه میزان همبستگی چنان است که توسط یک تابع احتمال از متغیرهای موضعی قابل توضیح نیست چرا که این نوع همبستگی ها چنانکه در ادامه خواهیم دید حتما قضیه بل را نقض می کند.

■ تمرین: نشان دهید که یک حالت ضربی به صورت (۳۰) نمی تواند قضیه بل را نقض کند.

[۲۷] Entangled States
[۲۸] product state
[۲۹] Pure bi-partite entangled state

یک حالت دوکیوبیتی کلی به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle_{AB} = a|0,0\rangle + b|0,1\rangle + c|1,0\rangle + d|1,1\rangle. \quad (۳۱)$$

هرگاه $ad - bc \neq 0$ باشد این حالت درهم تنیده است.

۲.۱.۴ حالت های درهم تنیده نا خالص

در درس های آینده با تفصیل بیشتری در باره درهم تنیدگی توضیح خواهیم داد، فعلا به چند تعریف ساده اکتفا می کنیم. ترکیب محدب حالت های ضربی را یک حالت درهم ناتنیده یا یک حالت جدایی پذیر [۳۰] می نامیم. شکل این حالت ها چنین است:

$$\rho = \sum_{i,j} p_{i,j} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes |\phi_j\rangle\langle\phi_j|. \quad (۳۲)$$

برای درست کردن این حالت ها نیازی به برهم کنش بین ذراتی که بین الیس و باب به اشتراک گذاشته شده نیست. آنها می توانند تنها با داشتن یک رشته مشترک از اعداد تصادفی و با مبادله اطلاعات کلاسیک با یکدیگر چنین حالتی را درست کنند. اعمال موضعی و مبادله اطلاعات کلاسیک [۳۱] فرایندی است که قادر به ایجاد حالت های درهم تنیده نیست.

- تمرین: با کمی تفصیل شرح دهید که آلیس و باب چگونه می توانند حالتی مثل حالت زیر را بین خود به اشتراک بگذارند:

$$\rho = \frac{1}{3}|z+\rangle\langle z+| + \frac{2}{3}|x+\rangle\langle x+|. \quad (۳۳)$$

می توان حالت های جدایی پذیر را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\rho_{AB} = \sum_i P_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B. \quad (۳۴)$$

- تمرین: نشان دهید که اگر حالتی به فرم (۳۳) باشد می توان آن را به فرم (۳۵) نوشت و بالعکس.

- تمرین: نشان دهید که حالت های جدایی پذیر نیز نامساوی بل را نقض نمی کنند.

[۳۰] Separable States

[۳۱] Local Operation and Classical Communication (LOCC)

پس از این مقدمه کوتاه در باره حالت های درهم تنیده نشان می دهیم که نتایج آزمایش های مربوط به نقض نامساوی بل را می توان در چارچوب مکانیک کوانتومی توضیح داد. این توضیح تنها به این معناست که مکانیک کوانتومی چارچوب نظری مناسبی برای توصیف همبستگی های فراتر از کلاسیک در جهان ماست. نخست توجه می کنیم که اگر چه آزمایشهای مربوط به نامساوی بل همه با فوتون ها انجام شده ، معمولا برای راحتی و به دلیل معادل بودن قطبش فوتون ها با ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ از مشاهده پذیرهای اسپینی بجای قطبش فوتون ها استفاده می شود. حالتی که فوتون های ارسال شده از منبع دارند به زبان اسپینی یک حالت درهم تنیده به شکل زیراست:

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle + |1,0\rangle\right). \qquad (۳۵)$$

به زبان اسپین ها نیز می توان گفت که آلیس و باب مولفه اسپین ذرات را در راستای های زیر اندازه می گیرند:

$$A_1 = S_x, \quad A_2 = S_z, \quad B_1 = a\,S_x + b\,S_z, \qquad B_2 = -b\,S_x + a\,S_z. \qquad (۳۶)$$

پارامترهای a و b را چنان می گیریم که جهت های اندازه گیری C و D برهم عمود باشند. حال مطابق با مکانیک کوانتومی متوسط کمیت زیر را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\langle (A_1+A_2)B_1 + (A_1-A_2)B_2\rangle &= \langle (S_x+S_z)(a\,S_x+b\,S_z) + (S_x-S_z)(-b\,S_x+a\,S_z)\rangle \\
&= \langle\Psi|(\hat{S}_x+\hat{S}_z)\otimes(a\,\hat{S}_x+b\,\hat{S}_z) + (\hat{S}_x-\hat{S}_z)\otimes(-b\,\hat{S}_x+a\,\hat{S}_z)|\Psi\rangle \\
&= \langle\Psi|(a-b)(\hat{S}_x\otimes\hat{S}_x - \hat{S}_z\otimes\hat{S}_z) + (a+b)(\hat{S}_x\otimes\hat{S}_z + \hat{S}_z\otimes\hat{S}_x)|\Psi\rangle \\
&=: \langle\Psi|\Omega|\Psi\rangle. \qquad (۳۷)
\end{aligned}$$

آخرین عبارت را براحتی می توان محاسبه کرد. فرم صریح ماتریس Ω برابراست با:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -a+b & a+b & a+b & a-b \\ a+b & a-b & a-b & -a-b \\ a+b & a-b & a-b & -a-b \\ a-b & -a-b & -a-b & -a+b \end{pmatrix} \qquad (۳۸)$$

و درنتیجه

$$\langle (A_1+A_2)B_1+(A_1-A_2)B_2\rangle = \langle\Psi|\Omega|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Omega\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(a-b). \qquad (۳۹)$$

به این ترتیب با انتخاب $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ به این نتیجه می رسیم که

$$\langle (A_1+A_2)B_1+(A_1-A_2)B_2\rangle = 2\sqrt{2} \qquad (۴۰)$$

که بوضوح نامساوی بل را نقض می کند و این همان مقداری است که در آزمایشها نیز بدست می آید. به این ترتیب می بینیم که این حالت کوانتومی که یک حالت درهم تنیده است دارای همبستگی هایی است که فراتر از همبستگی های کلاسیک یعنی همبستگی های موضعی و واقعی است. و بخصوص می بینیم که مکانیک کوانتومی مقدار این همبستگی ها را بدرستی توضیح می دهد.

۲.۴ مقدار بیشینه‌ی نقض نامساوی بل

با کمی تغییر در روابط بالا می توان براحتی فهمید که حالت های

$$|\phi^{\pm}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle)$$
$$|\psi^{\pm}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle) \qquad (۴۱)$$

که اصطلاحاً حالت های بل [۳۲] نامیده می شوند، همگی نامساوی بل را به میزانِ $2\sqrt{2}$ نقض می کنند. سوالی که درپیش رو داریم آن است که آیا حالتی می توان تصور کرد که نامساوی بل به مقداری بیشتر از این هم نقض شود؟ دراین قسمت نشان می دهیم که هیچ حالتی وجود ندارد که نامساوی بل را بیش از این نقض کند. واضح است که در تمام این بحث خود را به سیستم های دوقسمتی که هر زیر سیستم آن نیز دو بعدی است منحصر کرده‌ایم.

[۳۲] Bell States

در واقع نشان می دهیم که برای هر چهار مشاهده‌پذیر یا عملگر هرمیتیِ A_1, A_2, B_1, B_2 که ویژه مقادیر آن ها ± 1 باشد، و به ازای هر حالتِ $|\psi\rangle$ همواره رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\langle\psi|(A_1 + A_2) \otimes B_1 + (A_1 - A_2) \otimes B_2|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}. \quad (۴۲)$$

این نامساوی به نامساوی $Cirelson$ یا حدِّ سیرلسون مشهور است. برای اثبات این رابطه قرار می دهیم:

$$a_1 := A_1 \otimes I, \qquad a_2 := A_2 \otimes I, \qquad b_1 := I \otimes B_1, \qquad b_2 := I \otimes B_2. \quad (۴۳)$$

واضح است که این عملگرها در شرایط زیر صدق می کنند:

$$a_1^2 = a_2^2 = b_1^2 = b_2^2 = I,$$
$$[a_1, b_1] = [a_2, b_1] = [a_1, b_2] = [a_2, b_2] = 0. \quad (۴۴)$$

حال با استفاده از این روابط و تعریف عملگرِ M به صورتِ

$$M := (a_1 + a_2)b_1 + (a_1 - a_2)b_2$$

به رابطه زیر می رسیم:

$$M^2 = 4I - [a_1, a_2][b_1, b_2]. \quad (۴۵)$$

در این مرحله از یک تعریف برای اندازه عملگرها استفاده می کنیم که به شکل زیر است و عملگر $Sup\ Norm$ خوانده می شود:

$$||K||_{sup} := sup_{|\psi\rangle} \frac{||K|\psi\rangle||}{||\psi\rangle||}, \quad (۴۶)$$

که درآن $||\psi\rangle|| := \langle\psi|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}$ اندازه یک بردار و $sup_{|\psi\rangle}$ به معنای بیشینه گرفتن روی تمام بردارهای $|\psi\rangle$ است.

■ تمرین:

الف: نشان دهید که $||K||_{sup}$ برابر با قدرمطلق بزرگترین ویژه مقدارِ $\sqrt{K^\dagger K}$ است.

ب: نشان دهید که این نوع اندازه در نامساوی های زیر صدق می کند:

$$||K + L||_{sup} \leq ||K||_{sup} + ||L||_{sup}$$

$$||KL||_{sup} \leq ||K||_{sup}||L||_{sup}$$
$$||K^2||_{sup} = ||K||^2_{sup}. \qquad (۴۷)$$

حال با استفاده از این خواص و این که ویژه مقدارهای $a,\ a',\ b,\ b'$ همگی یک و منهای یک هستند، نتیجه می گیریم که

$$||M^2||_{sup} \leq 4 + |||[a_1, a_2]|||_{sup}|||[b_1, b_2]|||_{sup} \leq 4 + 4 = 8. \qquad (۴۸)$$

از آنجا که M یک ماتریس هرمیتی است، این امر به این معناست که اندازه بالاترین ویژه مقدارِ M^2 برابر با 8 است و در نتیجه اندازه بزرگترین ویژه مقدارِ M برابر با $2\sqrt{2}$ است. بنابراین نتیجه می گیریم که به ازای هر حالتِ دلخواهِ $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|M|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}, \qquad (۴۹)$$

و درنتیجه

$$\langle\psi|A_1 \otimes (B_1 + B_2) + A_1 \otimes (B_1 - B_2)|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}. \qquad (۵۰)$$

نامساوی $CHSH$ حد بیشینه‌ی همبستگی های کلاسیک بین نتایج اندازه گیری های این مشاهده پذیر ها و نامساوی سیرلسون حد بیشینه‌ی همبستگی های کوانتومی بین آنها را نشان می دهد. در بخش بعدی بازهم به این نامساوی ها و معنای آنها باز می گردیم.

۳.۴ آیا در هم تنیدگی نسبیت خاص را نقض می کند؟

آیا خصلت ناموضعی حالت های درهم تنیده به معنای نقض نسبیت خاص است؟ آیا آلیس می تواند با انجام آزمایش هایی با باب علامت دهی مافوق نوری انجام دهد؟ در این جا نشان می دهیم که پاسخ این سوال ها منفی است. در واقع آلیس با اندازه گیری های خود تنها می تواند نتایج آزمایش های باب را پیش گویی کند و به هیچ روی نمی تواند علامت یا سیگنالی را به او مخابره کند. برای فهم این موضوع کافی است که ماتریس چگالی باب را قبل و بعد از اندازه گیری آلیس بدست آورده و با هم مقایسه کنیم. به طور کلی فرض کنید که حالتی که در دست آلیس و باب است حالتی کلی به شکل زیرباشد:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu}|i, \mu\rangle, \qquad (۵۱)$$

بنابراین ذره‌ای که در دست باب قرار دارد در حالت زیر خواهد بود:

$$\rho_B = tr_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|). \quad (۵۲)$$

حال فرض کنید که آلیس یک اندازه گیری با عملگرهای $\{P_m\}$ روی ذره خودش انجام دهد. دراین صورت حالت دو ذره به حالت زیر تبدیل می شود:

$$\rho' = \sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_m^\dagger \otimes I). \quad (۵۳)$$

بعد از این اندازه گیری حالت ذره ای که در دست باب است برابرخواهد بود با:

$$\rho'_B = tr_A(\rho') = tr_A(\sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_m \otimes I).) \quad (۵۴)$$

اما دراین جا خواننده می تواند یک لم ساده را برای خود ثابت کند و آن اینکه tr_A به معنای زیر دارای خاصیت دوره‌ای است که درآن عملگر های X و Z روی فضای A عمل می کند و عملگر Y روی هر دو فضای A و B عمی می کند.

$$tr_A((X \otimes I)Y(Z \otimes I) = tr((Z \otimes I)(X \otimes I)Y) \quad (۵۵)$$

با استفاده از این خاصیت خواهیم داشت:

$$\rho'_B = tr_A(\sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|) = tr_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \rho_B. \quad (۵۶)$$

بنابراین حالت ذره ای که در دست باب است با اندازه گیری های آلیس تغییر نمی کند و درنتیجه اندازه گیری های آلیس به هیچ روی باعث تغییری در حالتِ ذره باب نخواهند شد و و درنتیجه هیچ نوع علامت یا اطلاعی به باب مخابره نمی شود. این امر ادعای ما را ثابت می کند که ناموضعیت به معنای نقض نسبیت خاص نیست. با این وجود حالت های درهم تنیده یعنی حالت هایی مثلِ 1 که نشان دهنده اثرات ناموضعی در مکانیک کوانتومی هستند، خصلت های غریبی دارند که آنها را شایسته مطالعه جدی و وسیع می کند. دردو دهه اخیر که موضوع کامپیوترها و اطلاعات کوانتومی گسترش یافته‌است نتایج فراوانی در مورد این نوع حالت ها بدست آمده است که در فصل های آینده به آنها خواهیم پرداخت. در فصل های آینده نشان می دهیم که اگر چه حالت های درهم تنیده را نمی توان برای علامت دهی فوق نوری به کار برد ولی می توان از آنها به عنوان منبعی استفاده کرد که با آن بتوان کارهایی ماورای تمام توانایی های کلاسیک انجام داد. در ادامه این بخش به یکی از این کارها اشاره می کنیم.

■ تمرین: حالت

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle \quad (۵۷)$$

را در نظر بگیرید که بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است.

الف: آلیس روی ذره خود در پایه z اندازه گیری می کند. حساب کنید که چه حالت هایی و با چه احتمالاتی برای باب ایجاد می شود. ماتریس چگالی باب را بدست آورید.

ب: یک بار دیگر آلیس روی ذره خود این بار در پایه x اندازه گیری می کند. حساب کنید که چه حالت هایی و با چه احتمالاتی برای باب ایجاد می شود. ماتریس چگالی باب را بدست آورید.

۴.۴ آیا هر حالت درهم تنیده‌ای نامساوی بل را نقض می کند؟

آیا هر حالت درهم تنیده‌ای نامساوی بل را نقض می کند؟ برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که یک حالت دلخواه از دو ذره را می توانیم با استفاده از تجزیه اشمیت به صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = \alpha|0,0\rangle + \beta|1,1\rangle, \tag{۵۸}$$

که در آن α و β اعداد مثبت و حقیقی هستند. از آنجا که $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ نتیجه می گیریم که کلی ترین حالتِ دو ذره ای به صورت زیر قابل بازنویسی‌است:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0,0\rangle + \sin\theta|1,1\rangle. \tag{۵۹}$$

این حالت دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned}
&\langle\psi|\sigma_1 \otimes \sigma_1|\psi\rangle = \sin 2\theta \\
&\langle\psi|\sigma_3 \otimes \sigma_3|\psi\rangle = 1 \\
&\langle\psi|\sigma_1 \otimes \sigma_3|\psi\rangle = \langle\psi|\sigma_3 \otimes \sigma_1|\psi\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{۶۰}$$

مشاهده پذیر های آلیس و باب را به ترتیب زیر انتخاب می کنیم:

$$\mathbf{A}_1 := \sigma_x \quad , \quad \mathbf{A}_2 := \sigma_z \quad , \quad \mathbf{B}_1 := \cos\gamma\sigma_x + \sin\gamma\sigma_z \quad , \quad \mathbf{B}_2 := \cos\gamma\sigma_x - \sin\gamma\sigma_z. \tag{۶۱}$$

محاسبه سرراست نشان می دهد که

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1|\psi\rangle &= \cos\gamma\sin 2\theta \\
\langle\psi|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2|\psi\rangle &= \cos\gamma\sin 2\theta \\
\langle\psi|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1|\psi\rangle &= \sin\gamma \\
\langle\psi|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2|\psi\rangle &= -\sin\gamma.
\end{aligned} \tag{۶۲}$$

با این انتخاب ها خواهیم داشت:

$$\langle\psi|A_1(B_1+B_2)+A_2(B_1-B_2)|\psi\rangle = 2\left(\sin\gamma+\cos\gamma\sin 2\theta\right). \tag{۶۳}$$

حال می خواهیم ببینیم آیا به ازای یک مقدار مناسب از γ طرف راست بزرگتر از ۲ می شود یا نه؟ عبارت داخل پرانتز مقدار فرینه[۳۳] ی خود را در نقطه‌ای انتخاب می کند که در آن

$$\cot\gamma = \sin 2\theta. \tag{۶۴}$$

دراین نقطه خواهیم داشت

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 2\theta}}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1+\sin^2 2\theta}} \tag{۶۵}$$

و درنتیجه دراین نقطه خواهیم داشت

$$\langle\psi|A_1(B_1+B_2)+A_2(B_1-B_2)|\psi\rangle = 2\sqrt{1+\sin^2 2\theta} \tag{۶۶}$$

که به ازای هرمقدارِ θ از ۲ بیشتر است. بنابراین هر حالتِ درهم تنیده‌ای حتماً نامساوی بل را نقض می کند. باید دقت کنیم که دراین جا حالت را خالص در نظر گرفته‌ایم. این امر برای حالت های آمیخته صحیح نیست. البته می بایست درهم تنیدگی را برای حالت های آمیخته تعریف کنیم. این کار را در تمرین ها انجام خواهیم داد.

---

[۳۳] Exrtremum

۵ حالت های GHZ

چنانچه دیدیم نامساوی بل یک نامساوی در مورد متوسط مشاهده پذیرهاست. نقض این نامساوی به این معناست که همبستگی هایی که در این حالت های ناموضعی وجود دارد، از آن نوعی است که به هیچ وجه توسط یک تابع احتمال همبسته و کلاسیک قابل بیان نیستند. به عبارت دیگر هیچ نظریه متغیرهای پنهان و موضعی که قایل به مقادیر واقعی برای اسپین ها باشد قادر نیست این همبستگی ها را توضیح دهد. برای تحقیق نامساوی بل می بایست روی تعداد زیادی نمونه های یکسان از حالت های درهم تنیده اندازه گیری کرد و مقادیر متوسط مشاهده پذیرهای خاصی را حساب کرد. چندین سال بعد از ارائه نامساوی بل، گرین برگر[۳۴]، هورن [۳۵] و زایلینگر [۳۶] نشان دادند که حالت هایی وجود دارند که هرکدام به تنهایی امکان وجود نظریه متغیرهای پنهان موضعی را نقض می کنند. این حالت ها امروزه به حالت های GHZ معروفند. یک نمونه از آنها به شکل زیراست:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+,z+,z+\rangle + |z-,z-,z-\rangle\right). \qquad (۶۷)$$

فرض کنید که ذره اول در دست آلیس ، ذره دوم در دست باب و ذره سوم در دست چارلی است. برای این سه نفر به ترتیب حروف A، B و C را به کار می بریم. هم چنین فرض می کنیم که این سه نفر هیچ نوع ارتباط علی با هم ندارند. هرگاه این سه نفر اندازه گیری های خود را در پایه Z انجام دهند به طور تصادفی به یکی از نتایج زیر دست می یابند:

$$Z_aZ_bZ_c = (1,1,1) \qquad \text{یا} \qquad Z_aZ_bZ_c = (-1,-1,-1) \qquad (۶۸)$$

این امر نشان دهنده یک نوع همبستگی غیرموضعی بین سه کمیت فوق است. ولی ممکن است که این همبستگی ناشی از وجود متغیرهای پنهانی باشد که سه کمیت واقعی Z_a، Z_b و Z_c را از قبل به هم وابسته کرده است مثل حالتی که در دستکش های چپ و راست داشتیم. برای فهم عمیق تر این مسئله و نوع همبستگی ای که بین این سه ذره وجود دارد، فرض کنید که این سه نفر اندازه گیری های خود را در پایه دیگری انجام دهند. فرض کنید که دو نفر اول اندازه گیری خود را در راستای Y و نفر سوم در راستای X انجام دهند. برای تعیین نتایج اندازه گیری ها می بایست حالتِ $|GHZ\rangle$ ددر پایه مناسبی بسط دهیم. برای این کار از روابط آشنای زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} |z+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle + |x-\rangle) \qquad |z-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle - |x-\rangle) \\ |z+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|y+\rangle + |y-\rangle) \qquad |z-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|y+\rangle - |y-\rangle. \end{aligned} \qquad (۶۹)$$

[۳۴] Greenberger
[۳۵] Horne
[۳۶] Zeilinger

با استفاده از روابط بالا می توان براحتی نشان داد که حالت $|GHZ\rangle$ بسط زیر را دارد:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}\left(|y+,y+,x-\rangle + |y+,y-,x+\rangle + |y-,y+,x+\rangle + |y-,y-,x-\rangle\right) \quad (۷۰)$$

دقت کنید که حاصل اندازه گیری این سه نفر در مورد مولفه های اسپین دارای یک خصلت ویژه است و آن اینکه حاصل ضرب مولفه های سه ذره در راستای مربوطه برابر است با -1 . به عبارت دیگر داریم

$$Y_a Y_b X_c = -1. \quad (۷۱)$$

یعنی مقادیر این کمیت های واقعی فیزیکی آنچنان است که حاصل ضرب $Y_a Y_b X_c$ همواره برابر با -1 است. اگر این سه نفر اندازه گیرهای خود را در راستاهای YXY یا XYY انجام می دادند و نتایجی مشابه بدست می آوردند که برای راحتی همه آنها را در رابطه‌ی زیر جمع می کنیم:

$$\begin{aligned} Y_a Y_b X_c &= -1, \\ Y_a X_b Y_c &= -1, \\ X_a Y_b Y_c &= -1. \end{aligned} \quad (۷۲)$$

اما ضرب این تساوی ها در هم به نتیجه زیر منجر می شود که

$$X_a X_b X_c = -1, \quad (۷۳)$$

که معنایش این است که سه خصلت X_a و X_b و X_c برای این سه ذره چنان هستند که حاصل ضرب آنها برابر با -1 است. اما اگر این حالت را در پایه‌ی XXX بسط دهیم نتیجه خلاف این خواهد بود. در واقع بسط حالت $|GHZ\rangle$ دراین پایه چنین است:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}\left(|x+,x+,x+\rangle + |x+,x-,x-\rangle + |x-,x+,x-\rangle + |x-,x-,x+\rangle\right). \quad (۷۴)$$

این بسط به این معناست که هرگاه روی سه ذره اندازه گیری های در پایه های فوق انجام دهیم همواره مقادیری که بدست می آوریم در رابطه $X_a X_b X_c = 1$ صدق می کند که آشکارا مخالف رابطه‌ی 74 است. بنابراین حالت های $|GHZ\rangle$ بدون نیاز به متوسط گیری روی تعداد زیادی اندازه گیری ها فرض وجود متغیرهای پنهان موضعی را نقض می کنند. اخیراً آزمایشهایی گزارش شده‌است که در آنها روی حالت های GHZ اندازه گیری های فوق انجام شده اند و نتایج بدست آمده در توافق با مکانیک کوانتومی و ناقض متغیرهای پنهان هستند.

۶ استراتژی های کلاسیک و کوانتومی

بهترین نحوه فهم تفاوتی که بین همبستگی های کلاسیک و کوانتومی وجود دارد آن است که معنای آنها را در مقیاس زندگی روزمره بفهمیم. برای این منظور به یک بازی فکری توجه می کنیم که مخصوصاً برای این منظور ابداع شده است. دراین نوع بازی ها که بعضاً به آنها بازی های کوانتومی [۳۷] نیز گفته می شود، نشان داده می شود که هرگاه بازیگران تنها از استراژی های کلاسیک استفاده کنند میزان برد آنها از یک مقدار معین هرگز تجاوز نمی کند. (منظور از یک استراتژی کلاسیک آن است که این افراد از هرنوع متغیرهای تصادفی هم بسته، برای تصمیم گیری های خود می توانند استفاده کنند.) اما هرگاه بازیگران از هم بستگی های کوانتومی مثلا یک زوج درهم تنیده و استفاده کنند و تصمیم گیری های خود را بر نتایج اندازه گیری بر روی این حالات استوار کنند، آنگاه قادر خواهند بود میزان برد خود را بیشتر کرده و از حد کلاسیک تجاوز کنند. در زیر با ساده ترین بازی های کوانتومی آشنا می شویم.

۱.۶ یک بازی کوانتومی با حالت های بل

فرض کنید که شخص ثالثی به نام چارلی دو متغیر تصادفی x و y را به ترتیب به آلیس و باب ارسال می کند. در عوض آلیس و باب به ترتیب مقادیر a و b را به چارلی باز پس می فرستند. هربار که مقادیر متغیرها در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

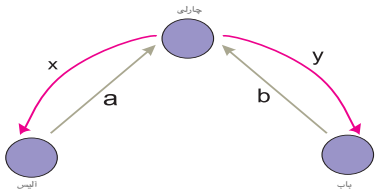
$$a \oplus b = x \wedge y, \qquad (۷۵)$$

آلیس و باب این دور از بازی را برده و هر بار که غیراز این باشد، این دور را می بازند. دقت کنید که تمام متغیرهای $a,\ b,\ x,\ y$ مقادیر 0 یا 1 را اختیار می کنند. ضمناً آلیس و باب نمی توانند از مقادیری که چارلی برای دیگری فرستاده‌است اطلاع حاصل کنند، شکل **??**.

فرض کنید که چارلی مقادیر 0 و 1 را به طور تصادفی و با فراوانی یکسان برای آروز و باب می فرستد. براحتی می توان دید که با هیچ استراتژی ای آلیس و باب نمی توانند در همه موارد (به ازای همه مقادیر دریافتی از پیام) بازی را ببرند. برای فهم این نکته متغیرهای a_0 و a_1 را مقادیری می گیریم که آلیس برای چارلی باز پس می فرستد اگر مقدارِ دریافتی x اش به ترتیب برابر با 0 و 1 باشند. به همین ترتیب متغیرهای b_0 و b_1 نیز تعریف می شوند. شرط برد آن است که هر چهار تساوی زیر برقرار شوند:

$$\begin{aligned} a_0 \oplus b_0 &= 0 \\ a_0 \oplus b_1 &= 0 \end{aligned}$$

[۳۷] Quantum Game



شکل ۷: بازی کوانتومی ای که در متن درس توضیح داده شده است. دراین بازی بُرد وقتی حاصل می شود که $a \oplus b = x \wedge y$.

$$\begin{aligned} a_1 \oplus b_0 &= 0 \\ a_1 \oplus b_1 &= 1. \end{aligned} \tag{۷۶}$$

با جمع کردن طرفین این تساوی ها و استفاده از خواص $\oplus$ به رابطه متناقض $1 = 0$ می رسیم و قضیه ثابت می شود. اما یک ترفند (استراتژی) وجود دارد که به بازیگران اجازه می دهد در سه چهارم موارد برنده باشند. این ترفند به این شکل است که قرار دهیم

$$a_0 = a_1 = 0, \qquad b_0 = b_1 = 0, \tag{۷۷}$$

به عبارت دیگر آلیس و باب مستقل از این که چه مقدارهایی از چارلی دریافت می کنند همواره بیت های صفر را به او ارسال می کنند. در چنین حالتی تساوی های چهارگانه‌ی بالا نشان می دهند که در سه مورد از چهار مورد آلیس و باب بازی را برده و در یک مورد می بازند. بنابراین در صورتی که چارلی بیت های خودش را به طور یکنواخت ارسال کند احتمال برد آلیس و باب $\frac{3}{4}$ است.

حال سوال می کنیم که آیا هیچ استراتژی یا ترفند دیگری وجود دارد که احتمال بُردش بیشتر از $\frac{3}{4}$ باشد؟ ممکن است که آلیس و باب بتوانند قبل از بازی بتوانند هماهنگی های لازم را بین خود بوجود آورده و از یک فرایند فیزیکی که برای آنها نتایج همبسته تولید می کند استفاده کرده و بر مبنای این نتایج همبسته احتمالا تصادفی در باره بیت های ارسالی خود به چارلی تصمیم بگیرند. طبیعی است که پس از آغاز بازی آلیس و باب اجازه هیچ گونه مکالمه و اطلاع یافتن از بیت های همدیگر را ندارند. برای این که پاسخ این سوال را بیابیم نخست متغیرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$\alpha_0 := (-1)^{a_0}, \qquad \alpha_1 := (-1)^{a_1}, \qquad \beta_0 := (-1)^{b_0}, \qquad \beta_1 := (-1)^{b_1} \tag{۷۸}$$

این متغیرها مقادیر ± 1 را اختیار می کنند. حال در تعداد بسیار زیادی بازی که انجام می دهند می توان متوسط زیر را حساب کرد.

$$\langle M\rangle := \langle \alpha_0(\beta_0+\beta_1)+\alpha_1(\beta_0-\beta_1)\rangle \leq 2, \qquad (۷۹)$$

که آن را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\langle M\rangle = \langle (-1)^{a_0+b_0}+(-1)^{a_0+b_1}+(-1)^{a_1+b_0}+(-1)^{a_1+b_1}\rangle \leq 2. \qquad (۸۰)$$

نشان می دهیم که احتمال موفقیت آلیس و باب در این بازی رابطه زیر را با $\langle M\rangle$ دارد:

$$P(success) = \frac{4+\langle M\rangle}{8}. \qquad (۸۱)$$

اگر این رابطه را ثابت کنیم به این معناست که وقتی که آلیس و باب از فرایندهای غیرکوانتومی استفاده می کنند بدلیل آنکه $\langle M\rangle \leq 2$ است ، احتمال برد آنها هیچگاه از مقدار $\frac{3}{4}$ نمی تواند زیادتر شود. اما وقتی که از یک حالت بل استفاده می کنند، به دلیل آنکه $\langle M\rangle = 2\sqrt{2}$ است، احتمال موفقیت آنها می تواند به مقدار $\frac{2+\sqrt{2}}{4} = 0.853$ برسد. در عین حال نامساوی سیرلسون بیان می کند که هیچ نوع استراتژی کلاسیک یا کوانتومی وجود ندارد که احتمال برد را از این مقدار بیشتر بکند.

اکنون تنها کاری که باقی مانده است این است که درستی رابطه ۸۲ را نشان دهیم. برای اینکار متوسط های موجود در رابطه ۸۱ محاسبه می کنیم. این متوسط ها را براحتی می توانیم محاسبه کنیم. با توجه به تعریف متوسط داریم

$$\langle (-1)^{a\oplus b}\rangle = P_{a\oplus b=0} - P_{a\oplus b=1}. \qquad (۸۲)$$

هم چنین توجه می کنیم که به عنوان مثال $P_{a_0\oplus b_0=0}$ برابر است با احتمال اینکه آلیس و باب وقتی که هر دو بیت 0 را دریافت می کنند بیت هایی را برای چارلی بفرستند که در شرط $a_0\oplus b_0 = 0$ صدق کنند و در نتیجه آن دور خاص را ببرند. به این ترتیب این عبارت یک احتمال شرطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
P_{a_0\oplus b_0=0} &= P(success|0,0) \quad , \quad P_{a_0\oplus b_0=1} = P(Failure|0,0)\\
P_{a_0\oplus b_1=0} &= P(success|0,1) \quad , \quad P_{a_0\oplus b_1=1} = P(Failure|0,1)\\
P_{a_1\oplus b_0=0} &= P(success|1,0) \quad , \quad P_{a_1\oplus b_0=1} = P(Failure|1,0)\\
P_{a_1\oplus b_1=0} &= P(Failure|1,1) \quad , \quad P_{a_1\oplus b_1=1} = P(success|1,1). \qquad (۸۳)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\langle(-1)^{a_0\oplus b_0}\rangle = P_{a_0\oplus b_0=0} - P_{a_0\oplus b_0=1} = P(success|0,0) - (1 - P(success|00)) = 2P(success|00) - 1,$$
$$\langle(-1)^{a_0\oplus b_1}\rangle = P_{a_0\oplus b_1=0} - P_{a_0\oplus b_1=1} = P(success|01) - (1 - P(success|01)) = 2P(success|01) - 1,$$
$$\langle(-1)^{a_1\oplus b_0}\rangle = P_{a_1\oplus b_0=0} - P_{a_1\oplus b_0=1} = P(success|10) - (1 - P(success|10)) = 2P(success|10) - 1,$$
$$\langle(-1)^{a_1\oplus b_1}\rangle = P_{a_1\oplus b_1=0} - P_{a_1\oplus b_1=1} = 1 - P(success|11) - P(success|11) = 1 - 2P(success|11).$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$2P(success|00) - 1 + 2P(success|01) - 1 + 2P(success|10) - 1 + 2P(success|11) - 1 = \langle M\rangle, \qquad (۸۴)$$

و یا

$$\sum_{i,j} P(success|i,j) = \frac{4 + \langle M\rangle}{2} \qquad (۸۵)$$

با توجه به اینکه احتمال فرستادن زوج های x, y مختلف از طرفِ چارلی برابر با $\frac{1}{4}$ است، خواهیم داشت

$$P(success) = \sum_{i,j} P(success|i,j)P(i,j) = \frac{4 + \langle M\rangle}{8} \qquad (۸۶)$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

■ تمرین: دقیقا استراتژی کوانتومی آلیس و باب را تعیین کنید و نشان دهید که با کاربرد آن آنها می توانند این بازی را با حداکثر احتمال برد برنده شوند.

۲.۶ یک بازی کوانتومی با حالت های GHZ

حالت های GHZ به شکل مستقیم تری خاصیت ناموضعی طبیعت را آشکار می کنند. این حالت ها در آزمایشگاه قابل تولید هستند و نتایج ناشی از آنها با آزمایش سازگار هستند. به همین دلیل می گوییم این حالت ها خاصیت ناموضعی طبیعت یا جهان بیرونی را و نه خاصیت غیرموضعی یک نظریه مثل مکانیک کوانتومی را آشکار می کنند. برای فهم این خاصیت بازهم یک بازی ساده را در نظر می گیریم. در این بازی که در شکل **؟؟** نشان داده شده است، پیام سه عدد x ، y و z را به سه نفر به نام های آرزو، بابک و حمید ارسال می کند. این سه عدد مقدارهای 0 و 1 را اختیار

می کنند. آرزو ، بابک و حمید می بایست به ترتیب اعداد a ، b و c را به پیام ارسال کنند. قواعد بازی این ها هستند:

یک ـ اعدادی که پیام ارسال می کند در شرط زیر صدق می کنند:

$$x \oplus y \oplus z = 0, \tag{۸۷}$$

بنابراین این اعداد فقط می توانند یکی از مجموعه های زیر باشند:

$$(x,\ y,\ z) \in \{(0\,0\,0),\ (0\,1\,1),\ (1\,0\,1),\ (1\,1\,0)\} \tag{۸۸}$$

دو ـ آرزو، بابک و حمید می توانند قبل از شروع بازی هر نوع استراتژی که می خواهند برای خود انتخاب کنند ولی در هنگام بازی این سه نفر هیچ نوع ارتباط علی با هم ندارند به این معنا که نمی توانند از بیت هایی که دریافت می کنند و یا بیت هایی که به پیام ارسال می کنند اطلاع حاصل کنند. هرکسی فقط بیتی را که خودش از پیام دریافت کرده و بیتی را که خودش به پیام می فرستد می شناسد. هم چنین هیچ گونه امکان تبادل نظر بین آنها وجود ندارد. به عبارت بهتر هرکدام از این سه نفر یک مهلت برای ارسال بیت خود دارد و این مهلت چنان تنظیم شده است که امکان هیچ گونه ارتباط بین گیرندگان وجود نداشته باشد.

سه ـ هر دور بازی وقتی برده می شود که شرط زیر برقرار شود:

$$a \oplus b \oplus c = x \vee y \vee z, \tag{۸۹}$$

که در آن $\vee$ به معنای یای منطقی بین این سه بیت است.

سوال این است که آیا آرزو ، بابک و حمید می توانند یک استراتژی انتخاب کنند که همواره بازی فوق را ببرند؟ پاسخ این سوال منفی است. برای فهم این پاسخ بیت های ارسال شده توسط آروز را با a_0 و a_1 نشان می دهیم که در آن a_0 بیتی است که آرزو ارسال می کند وقتی که بیت 0 را دریافت کرده باشد (یعنی $x = 0$ باشد) و a_1 بیتی است که آرزو ارسال می کند وقتی که بیت 1 را دریافت کرده باشد (یعنی $x = 1$ باشد). همینطور بیت های b_0 ، b_1 ، c_0 و c_1 را تعریف می کنیم. در این صورت شرط این که تحت هر شرایطی (به ازای هر نوع بیت های دریافتی از

طرف پیام) این سه نفر بازی را ببرند این است که هر چهار رابطه زیر همزمان برقرار باشند:

$$
\begin{aligned}
a_0 \oplus b_0 \oplus c_0 &= 0, \\
a_0 \oplus b_1 \oplus c_1 &= 1, \\
a_1 \oplus b_0 \oplus c_1 &= 1, \\
a_1 \oplus b_1 \oplus c_0 &= 1.
\end{aligned} \qquad (۹۰)
$$

اما واضح است که هرچهار معادله را همزمان نمی توان برقرار کرد زیرا جمع طرف چپ برابر است با 0 و حال آنکه جمع طرف راست برابر است با 1. بهترین کاری که این سه نفر می توانند انجام بدهند این است که قبل از بازی تصمیم بگیرند که یکی از این معادله ها را نقض و سه دیگر را برقرار کنند و به این ترتیب در سه چهارم موارد می توانند بازی را ببرند. دقت کنید که اگر این سه نفر بتوانند با هم ارتباط علی برقرار کنند آنگاه همواره می توانند معادله ۹۰ را حل کنند و بازی را ببرند.

اما نکته شگفت انگیز این جاست که اگر این سه نفر قبل از هر دور بازی یک حالت GHZ به اشتراک گذاشته باشند و هیچ گونه ارتباط علی نیز در حین بازی نداشته باشند می توانند همواره بازی را ببرند. می دانیم که حالت GHZ دارای یک خاصیت ناموضعی است و این خاصیت ناموضعی به هیچ وجه به معنای ارتباط علی نیست یعنی با استفاده از این حالت این اشخاص نمی توانند با هم اطلاعاتی را مخابره کنند ولی با این وجود دسترسی به این حالت منجر به این می شود که این سه نفر بتوانند بازی ای را همواره ببرند که تنها با داشتن ارتباط علی قابل حصول است. این استراتژی که در آن از یک منبع کوانتومی مثل درهم تنیدگی استفاده می شود یک استراتژی کوانتومی است. به این منظور این سه نفر یک حالت درهم تنیده به این شکل به اشتراک می گذارند: ———

$$
|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle), \qquad (۹۱)
$$

که در آن کیوبیت اول ، دوم و سوم به ترتیب در اختیار آرزو، بابک و حمید است.

حال استراتژی ای که سه نفر اختیار می کنند به این نحو است که هر کدام از این افراد روی کیوبیتی که در اختیار دارد یک اندازه گیری انجام می دهد. این اندازه گیری بسته به این دارد که چه بیتی از پیام دریافت می کند. اگر بیت 0 دریافت کرد، درپایه X و اگر بیت 1 را دریافت کرد در پایه Y اندازه گیری می کند. در هر مورد هم نتیجه ای را که دریافت کرده است برای پیام می فرستد. البته به طور دقیق تر اگر نتیجه اندازه گیری

اش در پایه انتخاب شده 1 بود برای پیام بیت 0 و اگر نتیجه اش -1 بود، بیت -1 را می فرستد. قبلا دریافته ایم که نتایج این اندازه گیری ها به گونه ای است که شرایط زیر همواره برقرار است:

$$\begin{aligned} X_aX_bX_c &= 1 \\ X_aY_bY_c &= -1 \\ Y_aX_bY_c &= -1 \\ Y_aY_bX_c &= -1. \end{aligned} \qquad (۹۲)$$

اما با توجه به قاعده ای که برای انتخاب پایه اندازه گیری و هم چنین برای ارسال بیت ها به کار می برند می دانیم که روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} X_a &:= (-1)^{a_0}, \qquad X_b = (-1)^{b_0}, \qquad X_c = (-1)^{c_0} \\ Y_a &:= (-1)^{a_1}, \qquad Y_b = (-1)^{b_1}, \qquad Y_c = (-1)^{c_1}. \end{aligned} \qquad (۹۳)$$

بنابراین نتایج آزمایش های (۹۳) به این معناست که بیت هایی که آرزو، بابک و حمید برای پیام ارسال می کنند در روابط زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 + c_0 &= 0 \\ a_0 + b_1 + c_1 &= 1 \\ a_1 + b_0 + c_1 &= 1 \\ a_1 + b_1 + c_0 &= 1. \end{aligned} \qquad (۹۴)$$

به این ترتیب در همه موارد آرزو، بابک و حیمد بازی را می برند. ممکن است متعجب شوید زیرا به نظر می رسد که بردن این سه نفر در همه دورها به وضوح با علم حساب و رابطه بالا تناقض دارد، ولی این دقیقا همان چیزی است که مکانیک کوانتومی و حالت GHZ می خواهند به ما بگویند و آن اینکه مقادیر a و b از قبل وجودی واقعی و مستقل از مشاهده ندارند و توسط مشاهده خلق می شوند.

---

۷ تمرین ها:

- نشان دهید که هر کدام از حالت های بل نامساوی بل را به یک مقدار بیشینه نقض می کنند.

■ **قضیه بل برای بیش از دو مشاهده پذیر:** فرض کنید که آلیس مشاهده پذیرهای $A_1,\ A_3, \cdots A_{2n-1}$ و باب مشاهده پذیرهای $B_2,\ B_4, \cdots B_{2n}$ را اندازه می گیرند. مقادیر مشاهده پذیرهای A_i و B_j را با a_i و b_j نشان می دهیم. این مقادیر نیز ± 1 هستند.

الف: ثابت کنید که همواره نامساوی زیر برقراراست

$$|a_1b_2 + b_2a_3 + a_3b_4 + b_4a_5 + \cdots a_{2n-1}b_{2n} - b_{2n}a_1| \leq 2n - 2, \qquad (۹۵)$$

و از آن نتیجه بگیرید که متوسط این مقادیر همواره در رابطه زیر صدق می کند:

$$|\langle a_1b_2 + b_2a_3 + a_3b_4 + b_4a_5 + \cdots a_{2n-1}b_{2n} - b_{2n}a_1|\rangle \leq 2n - 2. \qquad (۹۶)$$

ب: حال یک حالت درهم تنیده مثل

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+, z-\rangle - |z-, z+\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$$

را در نظر بگیرید. مشاهده پذیرهای A_i و B_i را به شکل زیر تعریف کنید:

$$A_i := \mathbf{a}_i \cdot \vec{\sigma}_A, \qquad B_i := \mathbf{b}_i \cdot \vec{\sigma}_B. \qquad (۹۷)$$

یعنی اینکه اندازه گیری A_i به معنی اندازه گیری اسپین ذره آلیس در راستای $\mathbf{a}_i$ و اندازه گیری B_i اندازه گیری اسپین ذره باب در راستای $\mathbf{b}_i$ است.

فرض کنید که بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{b}_2$ ، $\mathbf{a}_3$ ، $\mathbf{b}_4$ تا $\mathbf{b}_{2n}$ به طور یکنواخت چیده شده باشند و فاصله هر دو بردار متوالی برابر با θ باشد. مقداری را که مکانیک کوانتومی برای متوسط

$$|\langle\psi|A_1B_2 + B_2A_3 + A_3B_4 + B_4A_5 + \cdots A_{2n-1}B_{2n} - B_{2n}A_1|\psi\rangle| \qquad (۹۸)$$

پیش بینی می کند چقدراست؟ به ازای چه مقداری از θ این مقدار ماکزیمم می شود. این مقدار چقدر از مقداری که توسط نامساوی تعمیم یافته‌ی $CHSH$ یعنی 97 بدست آمده است بیشتر است؟

■ **حالت های GHZ و یک نامساوی بل برای آنها** حالت n تایی GHZ را در نظر بگیرید:

$$|GHZ_n\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\cdots0\rangle + |111\cdots1\rangle\right). \qquad (۹۹)$$

الف: تحقیق کنید که این حالت ویژه بردار همزمان عملگرهای زیراست:

$$\begin{aligned}
&z\otimes z\otimes I\otimes I\otimes I\cdots I\otimes I\\
&I\otimes z\otimes z\otimes I\otimes I\cdots I\otimes I\\
&I\otimes I\otimes z\otimes z\otimes I\cdots I\otimes I\\
&\cdots\\
&I\otimes I\otimes I\otimes I\otimes I\cdots z\otimes z\\
&x\otimes x\otimes x\otimes x\otimes x\cdots x\otimes x. \qquad (۱۰۰)
\end{aligned}$$

ب: نشان دهید که این حالت ویژه بردار عملگرِ زیراست و ویژه مقدارآن را بدست آورید:

$$A := (x+iy)^{\otimes n} + (x-iy)^{\otimes n}. \qquad (۱۰۱)$$

پ: اگر به متغیرهای پنهان اعتقاد داشته باشیم، باید قبول کنیم که برای یک مقدار معین از متغیرهای پنهان ، مشاهده پذیرهای x وy همزمان مقدارهای معینی دارند. اگر چنین باشد، اندازه (یا قدر مطلقِ) مشاهده پذیرهای $(x+iy)^{\otimes n}$ و $(x-iy)^{\otimes n}$ چقدراست. با توجه به این مقدارها، مشاهده پذیر A یک مقدار ماکزیمم خواهد داشت. این مقدار ماکزیمم را بدست آورید. نتیجه خود را با آنچه که در قسمت ب بدست آوردید مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

■ یک راه برای آنکه نشان دهیم حالت های بل واقعاً دارای خاصیتِ غیر موضعی هستند این است که نشان دهیم با اندازه گیری های موضعی هرگز نمی توان حالت های بل را از یک دیگر تشخیص داد. صحت این موضوع را تحقیق کنید.

■ حالتِ $\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این حالت را می توان به صورت مخلوطی از دو حالت بل نیز نوشت.

تمرین: نشان دهید با عمل موضعی (اندازه گیری، تبدیل یکانی) همراه با مبادله کلاسیک اطلاعات در صورت لزوم همواره می توان یک حالت بل را به هر حالت دو کیوبیتی دلخواه دیگری تبدیل کرد.

■ تمرین: حالت زیر را که به حالت ورنر موسوم است در نظر بگیرید:

$$\rho_W = \frac{1-t}{4} I + t|\psi\rangle\langle\psi|. \qquad (۱۰۲)$$

که در آن $|\psi\rangle$ یکی از حالت های بل است.

الف: از ملاک پرز استفاده کنید (به ضمیمه مراجعه کنید) و تعیین کنید به ازای چه مقادیری از t این حالت یک حالت جدایی پذیراست؟

ب: حالت ρ_W را برحسب ماتریس های پاوولی و حاصل ضرب های تانسوری آنها بسط دهید.

پ: نشان دهید که عملگرهای زیر عمل گرهای تصویری هستند:

$$P_x^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_x), \qquad P_y^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_y), \qquad P_z^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_z). \qquad (۱۰۳)$$

ت : به ازای مقادیری از t که حالت ورنر یک حالت جدایی پذیر است از روابطی که در قسمت (پ) پیدا کردید استفاده کنید و حالت ورنر را به صورت یک ترکیب خطی محدب از ماتریس های چگالی بنویسید. به این ترتیب به طور صریح نشان داده اید که واقعا حالت ورنر به ازای این مقادیر یک حالت جدایی پذیر است.

د : فرض کنید که پارامتر t در ناحیه زیر قرار دارد:

$$\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{7}{8\sqrt{2}-1} \qquad (۱۰۴)$$

نشان دهید که چنین حالت هایی نامساوی بل را نقض نمی کنند. بنابراین نشان داده اید که حالت های آمیخته اگر چه درهم تنیدگی دارند ولی لزوما نامساوی بل را نقض نمی کنند.

■ تمرین: یک حالت جدایی پذیر حالتی است که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\rho_{AB} = \sum_i P_i \rho_i \otimes \sigma_i, \qquad (۱۰۵)$$

که در آن P_i مقادیر مثبتی هستند با شرط $\sum_i P_i = 1$ و ρ_i ها و σ_i ماتریس های چگالی هستند. ثابت کنید یک حالت جدایی پذیر هرگز نامساوی بل را نقض نمی کند.

---

۸ ضمیمه:حالت های درهم تنیده آمیخته

حالت درهم تنیدگی خالص تعریف خیلی ساده ای دارد. اما حالت درهم تنیده آمیخته احتیاج به دقت بیشتری دارد. یک حالت ضربی به صورت زیر مشخص می شود:

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \qquad (۱۰۶)$$

در چنین حالتی هیچ نوع همبستگی بین نتایج اندازه گیری های آلیس و باب وجود ندارد. یک حالت جدایی پذیر [۳۸] به حالتی گفته می شود که به شکل زیر نوشته می شود:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)} \qquad (۱۰۷)$$

که در آن p_i ها یک توزیع احتمال را تشکیل می دهند و $\rho_A^{(i)}$ ها و $\rho_B^{(i)}$ ها ماتریس چگالی هستند. برای چنین حالتی نتایج اندازه گیری های آلیس و باب همبستگی دارند ولی این همبستگی کلاسیک است یعنی اینکه توسط متغیرهای موضعی قابل توضیح هستند.

[۳۸] Separable State

حالت درهم تنیده آمیخته حالتی است که نمی توان آن را به شکل بالا نوشت. بر خلاف حالت های خالص تشخیص حالت های درهم تنیده آمیخته دشوار است زیرا معلوم نیست که بتوانیم براحتی تجزیه یک حالت را به صورت (۱۰۸) بنویسیم. در سال ۱۹۹۶ اشر پرز [۳۹] یک ملاک ساده معرفی کرد که شرط لازم برای جدایی پذیری است. برای فهم ملاک پرز به حالت (۱۰۸) توجه می کنیم. با توجه به ساختار خاص این حالت که از ترکیب محدب ماتریس های چگالی ساخته شده است می دانیم که اگر تنها از یکی از قسمت های A یا B ترانهاده بگیریم، [۴۰] آنگاه حالت بدست آمده هم چنان مثبت خواهد بود . بنابراین اگر یک حالت دو بخشی داشته باشیم که ترانهاده جزئی آن مثبت نباشد آنگاه مطمئن هستیم که این حالت جدایی پذیر نیست. به عبارت بهتر اگر ρ یک حالت جدایی پذیر باشد، آنگاه حتما ρ^{T_A} نیز یک ماتریس چگالی است. دقت کنید که تحت این عمل رد ماتریس و هرمیتی بودن آن تغییر نمی کند و تنها چیزی که دستخوش تغییر می شود این است که ماتریس ترانهاده شده ممکن است دیگر مثبت نباشد. بنابراین برای استفاده از ملاک پرز کافی است که ویژه مقادیر ماتریس ρ^{T_A} را حساب کنیم. یادآوری می کنیم :

$$(\rho^{T_A})_{ij,kl} = \rho_{kj,il} \quad , \quad (\rho^{T_B})_{ij,kl} = \rho_{il,kj}. \tag{۱۰۸}$$

در اینجا خواننده می بایست خود را در مورد قاعده زیر برای شیوه محاسبه ترانهاده جزئی قانع کند:

$$\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \rho^{T_A} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \ , \ \rho^{T_B} = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}. \tag{۱۰۹}$$

نشان داده شده است که برای سیستم های 2×2 بعدی و 2×3 بعدی ملاک پرز هم شرط لازم است و هم شرط کافی. در ابعاد دیگر چنین نیست. فایده مهم ملاک پرز این است که اغلب اوقات یک ماتریس چگالی به صورت رابطه (۱۰۸) نوشته نشده است و با یک نگاه ساده نمی توان فهمید که آیا جدایی پذیر است یا نیست. ملاک پرز به ما اجازه می دهد که این قضاوت را خیلی زود انجام دهیم.

---

[۳۹] Asher Peres

[۴۰] Partial Transpose